Théorie des probabilités - Solutions

Allan Merino

Exercice 0.1. Calculer l'espérance et la variance dans le cas d'une loi de Poisson, d'une loi exponentielle et d'une loi normale de paramètres m et σ^2.

Solution 0.2. Commençons par la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On sait que $\mathbb{P}_X = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)\delta_n$. Comme rappelé dans le manuscrit, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_\mathbb{R} xd\left(\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)\delta_n\right)(x) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 0} n\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} n\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k\geqslant 0} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Calculons à présent le moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_\Omega X^2 d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x^2 d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_\mathbb{R} x^2 d\left(\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X = n)\delta_n\right)(x) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} n^2\mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} n^2\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} n\frac{\lambda^n}{(n-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1}(n-1)\frac{\lambda^n}{(n-1)!} + e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 2} \frac{\lambda^n}{(n-2)!} + e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^{n+2}}{n!} + e^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \\
&= \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \tag{1}$$

Regardons à présent l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On a $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_\Omega X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_\mathbb{R} x f_X(x) d\lambda(x) = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d\lambda(x) \\
&= \lambda\left([-\frac{1}{\lambda} x e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\lambda(x)\right) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} d\lambda(x) = [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

Déterminons à présent le moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_\Omega X^2 d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} x^2 d\mathbb{P}_X(x) \\
&= \int_\mathbb{R} x^2 f_X(x) d\lambda(x) = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} d\lambda(x) \\
&= \lambda\left([-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} d\lambda(x)\right) \\
&= 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d\lambda(x) = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X) \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{2}$$

Exercice 0.3. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et sur cet espace, considérons une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'évènements indépendants.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_i)).$$

2. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(A_i) = p$, $p \in]0, 1[$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1.$$

Solution 0.4. 1. Comme les éléments sont indépendants, on sait que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$. Remarquons que si deux évènement A et B sont indépendants, alors A^c et B^c sont indépendants. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\
&= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) \\
&= (1 - \mathbb{P}(A))(1 - \mathbb{P}(B)) \\
&= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= 1 - \mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{A_i^c}) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{A_i^c}) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i))
\end{aligned}$$

2. Comme $p \in]0, 1[$, on a $1 - p \in]0, 1[$. Ainsi, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_i)) = 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - p)^n = 1.$$

Exercice 0.5. Déterminer les variables aléatoires réelles X, de fonction de répartition F_X, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, telles que :

$$2a\mathrm{F_X^3} - 3\mathrm{F_X^2} + aF_X = 0,$$

où a est une constante réelle positive.

Solution 0.6. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. Ainsi, on obtient la condition suivante sur a :

$$2a - 3 + a = 0,$$

i.e. $a = 1$. On résout donc $2\mathrm{F_X^3} - 3\mathrm{F_X^2} + F_X = 0$. Ainsi, $(\forall x \in \mathbb{R})$, on a $2\mathrm{F_X^3}(x) - 3\mathrm{F_X^2}(x) + F_X(x) = 0$, i.e. $F_X(x)(2F_X(x) - 1)(F_X(x) - 1) = 0$. Ainsi, on a $F_X(x) = 0, 1/2$ ou 1. Ainsi, X est une variable aléatoire discrète de la forme :

$$\mathbb{P}_X = \frac{1}{2}\delta_\alpha + \frac{1}{2}\delta_\beta \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_X = \delta_m.$$

Exercice 0.7. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. On considère sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire discrète Y, indépendante de la variable aléatoire X, de loi de probabilité

$$\mathbb{P}_Y = \frac{3}{5}\delta_{-1} + \frac{1}{5}\delta_0 + \frac{1}{5}\delta_1.$$

1. Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $F_Y(x) = \frac{1}{10}x + \frac{7}{10}$.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y^2.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = sup(X, Y)$.
5. Soit T la variable aléatoire définie par $T = inf(Z, Y^2)$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T.
   (b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T)$, et la variance $\mathbb{V}(T)$, de la variable aléatoire T.
6. Calculer la probabilité de l'évènement $(Z = T)$.

Solution 0.8. 1. La fonction de répartition F_Y est donnée par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 3/5 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 4/5 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Il suffit de voir si il existe une solution à cette équation sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $[-1, 0[$, $[0, 1[$ et $[1, +\infty[$. Si $x \in]-\infty, -1[$, alors $F_X(x) = 0$. Ainsi, $\frac{1}{10}x + \frac{7}{10} = 0$ si et seulement si $\frac{1}{10}x = -\frac{7}{10}$, i.e. $x = -7$, qui est bien dans l'intervalle $]-\infty, -1[$. Si $x \in [-1, 0[$, alors, $F_X(x) = 3/5$. Ainsi, on résout $\frac{1}{10}x + \frac{7}{10} = \frac{6}{10}$, i.e. $\frac{x}{10} = \frac{-1}{10}$. Ainsi, $x = -1$ et $-1 \in [-1, 0[$. Si $x \in [0, 1[$, alors, $F_X(x) = 4/5$. On a alors $\frac{x}{10} = \frac{1}{10}$, i.e. $x = 1$ mais 1 n'est pas dans l'intervalle. Pour finir, si $x > 1$, alors, $F_X(x) = 1$. Ainsi, on résout $\frac{x}{10} = \frac{3}{10}$, i.e. $x = 3$. On a alors 3 solutions.
3. La variable aléatoire Y^2 est positive presque sûrement. On a :

$$\mathbb{P}(Y^2 = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{5},$$

et

$$\mathbb{P}(Y^2 = 1) = \mathbb{P}((Y = -1) \cup (Y = 1)) = \mathbb{P}(Y = -1) + \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Ainsi, on a :

$$\mathbb{P}_{Y^2} = \frac{1}{5}\delta_0 + \frac{4}{5}\delta_1.$$

4. On a $X \sim Ber(\frac{1}{3})$. Ainsi, $\mathbb{P}_X = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1$. Posons $Z = sup(X, Y)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 0) &= \mathbb{P}(sup(X, Y) = 0) = \mathbb{P}(((X = 0) \cap (Y = 0)) \cup ((X = 0) \cap (Y = -1))) \\ &= \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{2}{3}.\frac{1}{5} + \frac{2}{3}.\frac{3}{5} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Z=1) = 1 - \mathbb{P}(Z=0) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$. On pouvait le voir aussi comme suit :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}(Z=1) & = & \mathbb{P}(sup(X,Y)=1) \\
& = & \mathbb{P}(((X=0)\cap(Y=1))\cup((X=1)\cap(Y=0))\cup((X=1)\cap(Y=1))\cup((X=1)\cap(Y=-1))) \\
& = & \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1)) + \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=0)) + \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1)) \\
& + & \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=-1)) \\
& = & \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) \\
& + & \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=-1) \\
& = & \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{5} \\
& = & \dfrac{7}{15}
\end{array}$$

Ainsi, $\mathbb{P}_Z = \frac{8}{15}\delta_0 + \frac{7}{15}\delta_1$.

5. On définit à présent $T = inf(Z, Y^2)$. On remarque que l'on a $\mathbb{P}(T=0) + \mathbb{P}(T=1) = 1$. On va déterminer $\mathbb{P}(T=1)$. On a :

$$\mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}(inf(Z,Y^2)=1) = \mathbb{P}((Z=1)\cap(Y^2=1)).$$

Or, on a $(Z=1) = ((X=0)\cap(Y=1))\cup((X=1)\cap(Y=0))\cup((X=1)\cap(Y=1))\cup((X=1)\cap(Y=-1))$. On obtient donc :

$$\mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}((X=0)\cap(Y=1)) + \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=-1)) + \mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1)),$$

i.e. $\mathbb{P}(T=1) = \frac{6}{15}$. Ainsi, on a $\mathbb{P}_T = \frac{7}{15}\delta_0 + \frac{6}{15}\delta_1$. Il vient alors directement que l'on a $\mathbb{E}(T) = \frac{6}{15}$. De même, on obtient que $\mathbb{V}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(T)^2 = \mathbb{E}(T)(1-\mathbb{E}(T)) = \frac{6}{15}.\frac{9}{15} = \frac{54}{225}$.

6. Pour conclure, calculons $\mathbb{P}(Z=T)$. On a $\mathbb{P}(Z=T) = \mathbb{P}(inf((Z,Y^2))=Z) = \mathbb{P}(((Z=0)\cap(Y^2=0))\cup((Z=0)\cap(Y^2=1)))$. Mais, on a aussi $\mathbb{P}(Z=T) = 1 - \mathbb{P}(Z \neq T) = 1 - \mathbb{P}((Y^2=0)\cap(Z=1))$. Or, $\mathbb{P}((Y^2=0)\cap(Z=T)) = \mathbb{P}((Y=0)\cap(X=1)) = \mathbb{P}(Y=0)\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{5}.\frac{1}{3} = \frac{1}{15}$. Finalement, on obtient :
$$\mathbb{P}(Z=T) = \frac{14}{15}.$$

Exercice 0.9. Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x \in]0, \pi/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire Y par :
$$Y = tan(X).$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.

2. Déterminer, si elle existe, la densité f_Y de la variable aléatoire Y.
3. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

Solution 0.10. 1. On a :

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}(tan(X) \leqslant y) = \mathbb{P}(X \leqslant arctan(y)) = F_X(arctan(y)).$$

Or, on a $F_X(x) = 0$ si $x < 0$. Si $x > \frac{\pi}{2}$, on a $F_X(x) = 1$. Si $x \in]0, \pi/2[$, on a :

$$F_X(x) = \int_0^x cos(t)dt = sin(x).$$

Ainsi, on a $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$ et $F_Y(y) = sin(arctan(y))$ si $y \geqslant 0$.

2. Il suffit (c'est déjà pas mal) de dérivée la fonction de répartition F_Y. On obtient alors :

$$f_Y(y) = \frac{1}{1+y^2} cos(arctan(y))\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y).$$

3. Déterminons à présent l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y. On a :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(tan(X)) = \int_{\mathbb{R}} tan(x) f_X(x)dx = \int_0^{\pi/2} sin(x)dx = [-cos(x)]_0^{\pi/2} = 1.$$

De même, on a :

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(tan(X)^2) = \int_0^{\pi/2} tan^2(x)cos(x)dx = \int_0^{\pi/2} \frac{sin^2(x)}{cos(x)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1-cos^2(x)}{cos(x)}dx$$

Or, on a $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{cos(x)}dx$ diverge. Ainsi, la variance n'existe pas.

Exercice 0.11 (Somme de lois exponentielles)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité exponentielle de paramètres respectifs α et β ($\alpha \neq \beta$). Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ a pour densité :

$$f_{X+Y}(x) = \alpha\beta \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{\beta - \alpha} 1_{]0,+\infty[}(x).$$

Solution 0.12. On souhaite déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$. Pour cela, on va faire un changement de variables. On pose $U = X$ et $V = X + Y$. Soit Ψ une fonction borélienne. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Psi(U,V)) &= \mathbb{E}(\Psi(X, X+Y)) = \int_{\Omega} \Psi(X, X+Y)d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(x, x+y)d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(x, x+y) f_{(X,Y)}(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

On pose donc $u = x$ et $v = x + y$. On a alors $y = v - u$. On a donc $v > u$. Le domaine d'intégration devient alors :

$$\Delta = \{(u, v)/0 < u < v\},$$

et le jacobien du changement de variable est 1. On a alors :

$$f_{(U,V)}(u, v) = f_{(X,Y)}(u, v - u)\mathbb{1}_{\Delta}(u, v) = f_X(u) f_Y(v - u)\mathbb{1}_{\Delta}(u, v),$$

i.e.

$$f_{(U,V)}(u, v) = \alpha\beta e^{-\alpha u} e^{-\beta(v-u)}\mathbb{1}_{\Delta}(u, v).$$

On va alors déterminer f_V. Soit $v > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u, v)du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha\beta e^{-\alpha u} e^{-\beta(v-u)}\mathbb{1}_{\Delta}(u, v) \\
&= \alpha\beta e^{-\beta v} \int_0^v e^{(\beta-\alpha)u} du \\
&= \alpha\beta e^{-\beta v}[\frac{e^{(\beta-\alpha)u}}{\beta - \alpha}]_0^v \\
&= \frac{\alpha\beta e^{-\beta v}}{\beta - \alpha}(e^{(\beta-\alpha)v} - 1) \\
&= \alpha\beta \frac{e^{-\alpha v} - e^{-\beta v}}{\beta - \alpha}
\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé.

Pour montrer la remarque avec le produit de convolution, on utilise la même méthode.

Exercice 0.13. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \tag{3}$$

Solution 0.14. On a :

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\Omega} XY d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^2} xy d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y).$$

Or, comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$. Ainsi, on conclue que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \int_{\mathbb{R}^2} xy d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} xy(d\mathbb{P}_X \otimes d\mathbb{P}_Y)(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} xy d\mathbb{P}_X(x) d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x) \right) d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} y \mathbb{E}(X) d\mathbb{P}_Y(y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 0.15. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la densité, notée $f_{(X,Y)}$, est donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-2y}e^{-x} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Que vaut $P(X < Y)$?
3. Calculer l'espérance du produit XY.
4. On définit la variable aléatoire $Z = X + Y$. Que vaut $P(Z \leqslant t), t \in \mathbb{R}$?

Solution 0.16. 1. On connait la densité de probabilité du couple (X, Y). On va donc exprimer les lois marginales à l'aide de leurs densités marginales f_X et f_Y respectivement. On a, pour $x > 0$, que :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} 2e^{-2y}e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)d\lambda(y) \\ &= e^{-x}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}d\lambda(y) = e^{-x}[-e^{-2x}]_0^{\infty} = e^{-x} \end{aligned}$$

Ainsi, $f_X(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$, donc X suit une loi exponentielle de paramètre 1. On notera $X \sim \epsilon(1)$. De la même manière, pour tout $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 2e^{-2y}e^{-x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)d\lambda(x) \\ &= 2e^{-2y}\int_0^{+\infty} e^{-x}d\lambda(x) = 2e^{-2y}[-e^{-x}]_0^{\infty} = 2e^{-2y} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $Y \sim \epsilon(2)$. D'ailleurs, on remarque directement que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes car :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = e^{-x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).2e^{-2y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) = f_X(x)f_Y(y).$$

2. On a $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X<Y\}})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{X<Y}) &= \int_{\Omega} \mathbb{1}_{X<Y}d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x<y}(x,y)d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x<y}(x,y)f_{(X,Y)}(x,y)d\lambda(y)d\lambda(x) \\ &= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)d\lambda(y)d\lambda(x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\int_x^{+\infty} 2e^{-2y}d\lambda(y)\right)d\lambda(x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}[-e^{-2y}]_x^{+\infty}d\lambda(x) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-3x}d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. On sait que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes. Ainsi, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Or, l'espérance d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est égale à $1/\lambda$. Ainsi, on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{2}.$$

4. On définit ici la variable aléatoire $Z = X + Y$. On cherche à déterminer $\mathbb{P}(Z \leqslant t)$. Clairement, si $t < 0$, on a $\mathbb{P}(Z < t) = 0$. Fixons $t \geqslant 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z \leqslant t) &= \mathbb{P}(X + Y \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant t - Y) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \leqslant Y-y\}}) = \int_\Omega \mathbb{1}_{\{X \leqslant Y-t\}} d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x \leqslant t-y\}}(x,y) d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{x \leqslant y-t\}}(x,y) f_{(X,Y)}(x,y) d\lambda(x) d\lambda(y) \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{t-y} e^{-x} d\lambda(x) \right) 2e^{-2y} d\lambda(y) = \int_0^t [-e^{-x}]_0^{t-y} 2e^{-2y} d\lambda(y) \\
&= 2\int_0^t (-e^{y-t} + 1) e^{-2y} d\lambda(y) = -2e^{-t} \int_0^t e^{-y} d\lambda(y) + 2\int_0^t e^{-2y} d\lambda(y) \\
&= -2e^{-t}[-e^{-y}]_0^t + 2[-\frac{1}{2}e^{-2y}]_0^t = -2e^{-t}(-e^{-t} + 1) + (-e^{-2t} + 1) \\
&= 1 + e^{-2t} - 2e^{-t}
\end{aligned}$$

Exercice 0.17. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de densité $f(x) = \frac{1}{x^2} 1_{[1,+\infty[}(x)$. Soient U et V deux variables aléatoires définies par :

$$U = X_1 X_2 \quad V = \frac{X_1}{X_2}.$$

1. Déterminer la loi de probabilité du couple (U, V).
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Calculer les lois de probabilité des variables aléatoires U et V.
4. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{U}V}\right)$.

Solution 0.18. 1. On sait déjà que X_1 et X_2 sont indépendants. Ainsi, on a $f_{(X_1,X_2)} = f_{X_1} f_{X_2}$. Il vient alors directement que

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\mathrm{x}_1^2 \mathrm{x}_2^2} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x_1) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x_2).$$

On pose $u = x_1 x_2$ et $v = \frac{x_1}{x_2}$. On a alors directement que $u \geqslant 1$ et $v \geqslant 0$. De plus, on obtient que

$$x_1 = \sqrt{uv} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}.$$

Il vient alors que l'on a aussi $u \geqslant v$ (car $x_1 \geqslant 1$) et $u \geqslant \frac{1}{v}$. Le jacobien du changement de variable est donné par :

$$det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{v}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v^{3/2}} \end{pmatrix} = \frac{-1}{2v}.$$

Posons $\Delta = \{(u,v) \in [1,+\infty[\times[0,+\infty[/u \geqslant v, u \geqslant \frac{1}{v}\}$. Alors, la densité du couple (U,V) est donnée par :

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{1}{u^2 v}\mathbb{1}_\Delta(u,v).$$

2. On remarque directement que U et V ne sont pas indépendantes car $f_{(U,V)}(u,v) \neq f_U(u)f_V(v)$ en général.

3. Commençons par déterminer la loi de V. Si $v \in]0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)du \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{v}}^{+\infty} \frac{1}{u^2 v}du = \frac{1}{2v}\int_{\frac{1}{v}}^{+\infty} \frac{1}{u^2}du \\ &= \frac{1}{2v}[\frac{-1}{u}]_{\frac{1}{v}}^{+\infty} \\ &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

De même, si $v \geqslant 1$, on obtient que :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)du \\ &= \frac{1}{2}\int_{v}^{+\infty} \frac{1}{u^2 v}du = \frac{1}{2v}\int_{v}^{+\infty} \frac{1}{u^2}du \\ &= \frac{1}{2v}[\frac{-1}{u}]_{v}^{+\infty} \\ &= \tfrac{1}{2v^2} \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$f_V(v) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{]0,1[}(v) + \frac{1}{2v^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(v).$$

On fait à présent de même pour la loi de U. On sait que l'on a $u \geqslant \frac{1}{v}$ et $u \geqslant v$. On obtient donc que $\frac{1}{u} \leqslant v \leqslant u$. Pour tout $u \geqslant 1$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)dv \\ &= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{u^2 v}du = \frac{1}{2u^2}\int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{v}dv \\ &= \frac{1}{2u^2}[ln(v)]_{\frac{1}{u}}^{u} \\ &= \tfrac{ln(u)}{u^2} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$f_U(u) = \frac{ln(u)}{u^2}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(u).$$

4. Pour déterminer cette espérance, il suffit de calculer :

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{uv}} f_{(U,V)}(u,v)dudv.$$

A vous de jouer !

Exercice 0.19 (Extrait examen de janvier 2014)**.** Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, c'est-à-dire que X est de densité f_X donnée par $f_X(x) = 1_{[0,1]}(x)$. Soient $\lambda > 0$ et $Y = -ln(X)/\lambda$.

1. Montrer que F_X, la fonction de répartition de X, est donnée par $F_X(t) = min(t^+, 1)$, où $t^+ = max(t,0)$.
2. Vérifier que $X > 0$ presque sûrement et en déduire que Y est bien définie. Calculer F_Y, la fonction de répartition de Y puis donner la loi de Y.
3. Démontrer que l'on a, pour toute fonction borélienne bornée g,

$$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\lambda e^{-\lambda y} 1_{\mathbb{R}^+}(y)dy.$$

Retrouver par ce calcul la loi de Y.

Solution 0.20. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{[0,1]}(t)dt$. Ainsi, si $x < 0$, on obtient que $F_X(x) = 0$. Si $x \in [0,1]$, alors, $F_X(x) = \int_0^x dt = x$. Pour conclure, si $x > 1$, on a $F_X(x) = 1$.

2. On cherche à déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X > 0)$. On sait que $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant 0) = 1 - F_X(0) = 1$. Ainsi, X est positive. Ainsi, la variable aléatoire Y est bien définie. Nous allons à présent déterminer la loi de la variable aléatoire Y. Pour cela, déterminons sa fonction de répartition. Pour $s \leqslant 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} F_Y(s) &= \mathbb{P}(Y \leqslant s) = \mathbb{P}(-ln(X)/\lambda < s) = \mathbb{P}(ln(X)/\lambda > -s) = \mathbb{P}(ln(X) > -s\lambda) \\ &= \mathbb{P}(X > e^{-\lambda s}) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant e^{-\lambda s}) = 1 - e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

Clairement, $F_Y(s) = 0$ si $s < 0$. On dérive alors la fonction de répartition. On obtient que $f_Y = \mathrm{F}'_\mathrm{Y} = \lambda e^{-\lambda \cdot}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$. On obtient donc directement que la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

3. Soit g une fonction borélienne. On a alors :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\Omega} g(Y)d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(y)d\mathbb{P}_Y(y),$$

où la dernière égalité est une conséquence du théorème de transport. En utilisant le théorème de Radon-Nikodym, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) d\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} g(y) f_Y(y) d\lambda(y).$$

Exercice 0.21. Extrait de janvier 2014

Soient $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x < y\}$ et $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par :

$$f_Z(x,y) = ce^{-y} 1_{\Delta}(x,y).$$

1. Calculer la constante c.
2. Déterminer les lois marginales de Z. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Trouver les lois des variables aléatoires $T = X - Y$ et $R = X/Y$.

Solution 0.22.

1. On sait que $\int_{\mathbb{R}^2} f_Z(x,y) dx dy = 1$. Or, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f_Z(x,y) dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_0^y ce^{-y} dx dy \\
&= c \int_0^{+\infty} ye^{-y} dy \\
&= c\left([ye^{-y}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \right) \\
&= c[-e^{-y}]_0^{+\infty} = c
\end{aligned}$$

   Ainsi, la constante c est égale à 1.

2. En utilisant le cours, on obtient que :

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y) dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y) dx.$$

   D'un côté, on a, pour $x > 0$:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-y} \mathbb{1}_{\Delta}(x,y) dy = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x},$$

   i.e. $f_X(x) = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$. De même, pour $y > 0$, on obtient :

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x,y) dx = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}.$$

   Ainsi, $f_Y(y) = ye^{-y} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$. On conclue alors directement que X et Y ne sont pas indépendantes, car $f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ en général.

3. Soit Ψ une fonction borélienne. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\Psi(T,R)) &= \mathbb{E}(\Psi(X-Y,X/Y)) = \int_\Omega \Psi(X-Y,X/Y)d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(x-y,x/y)d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Psi(x-y,x/y)f_{(X,Y)}(x,y)dxdy
\end{aligned}$$

On pose $t = x-y$ et $r = x/y$. On a donc $ry = x$. Donc, $t = (r-1)y$, ce qui implique que $y = \frac{t}{r-1}$. Ainsi, $x = \frac{rt}{r-1}$. Le jacobien du changement de variable est donné par :

$$Jac_{(T,R)}(r,t) = det\begin{pmatrix} \frac{r}{r-1} & \frac{-t}{(r-1)^2} \\ \frac{1}{r+1} & \frac{-t}{(r-1)^2} \end{pmatrix} = \frac{-t}{(r-1)^2}.$$

On a $t < 0$ et $r \in]0,1[$. Le domaine Δ devient :

$$\Lambda = \{(t,r) \in \mathbb{R}_-^* \times]0,1[\}.$$

Ainsi,

$$f_{(T,R)}(t,r) = \frac{-t}{(r-1)^2} e^{-\frac{t}{(r-1)}} \mathbb{1}_\Lambda(r,t).$$

On commence alors par calculer la loi de R. On a, pour tout $r \in]0,1[$, que :

$$\begin{aligned}
f_R(r) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(T,R)}(t,r)dt = \int_{-\infty}^0 \frac{-t}{(r-1)^2} e^{-\frac{t}{(r-1)}} dt \\
&= \frac{-1}{(r-1)^2} \int_{-\infty}^0 te^{-\frac{t}{r-1}} dt = \frac{-1}{(r-1)^2} \left([-t(r-1)e^{-\frac{t}{(r-1)}}]_{-\infty}^0 + (r-1) \int_\infty^0 e^{-\frac{t}{(r-1)}} dt \right) \\
&= \frac{-1}{(r-1)} \int_\infty^0 e^{-\frac{t}{(r-1)}} dt = \frac{-1}{(r-1)} [-(r_1)]_{-\infty}^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $f_R(r) = \mathbb{1}_{]0,1[}$, i.e. R suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$. Regardons à présent la loi de T. Soit $t \in]-\infty, 0[$. On a alors :

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(T,R)}(t,r)dt = \int_0^1 \frac{-t}{(r-1)^2} e^{-\frac{t}{(r-1)}} dt \\
&= -[e^{-\frac{t}{(r-1)}}]_0^1 = e^t
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $f_T(t) = e^t \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(t)$.

Exercice 0.23. Extrait de janvier 2014

Si Z est une variable aléatoire réelle, on pose $\Lambda_Z(s) = \mathbb{E}(e^{sZ})$, $s \in \mathbb{R}$. Soient Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et X une variable aléatoire $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Démontrer que $\Lambda_Y(s) = e^{s^2/2}$. En déduire la valeur de $\Lambda_X(s)$.
2. Que valent $\Lambda_X^{'}(0)$ et $\Lambda_X^{''}(0) - \Lambda_X^{'}(0)^2$?

Solution 0.24. 1. On va déterminer la transformée de Laplace d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\Lambda_Y(s) &= \mathbb{E}(e^{sY}) = \int_\Omega e^{sY} d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} e^{sy} d\mathbb{P}_Y(y) \\
&= \int_\mathbb{R} e^{sy} f_Y(y) d\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{sy} e^{-\frac{y^2}{2}} d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{-\frac{y^2}{2}+sy} d\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2sy)} d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(y^2-2sy+s^2-s^2)} d\lambda(y) = e^{\frac{s^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\mathbb{R} e^{-\frac{1}{2}(y-s)^2} d\lambda(y) \\
&= e^{\frac{s^2}{2}} \int_\mathbb{R} f_{\mathcal{N}(s,1)}(y) dy = e^{\frac{s^2}{2}}
\end{aligned}$$

Fixons à présent une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

2. Si Y est une loi normale centrée réduite, alors, $\sigma Y + \mu$ est une loi normale de paramètre $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\Lambda_X(s) &= \mathbb{E}(e^{sX}) = \mathbb{E}(e^{s(\sigma Y+\mu)}) = e^{s\mu}\mathbb{E}(e^{(s\sigma)Y}) \\
&= e^{s\mu}\Lambda_Y(s\sigma) = e^{s\mu} e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2}}
\end{aligned}$$

3. Il suffit de dériver la fonction obtenue précédement. On obtient directement :

$$\Lambda_X^{'}(0) = \mu,$$

$$\Lambda_X^{''}(0) - \Lambda_X^{'}(0) = \sigma^2$$