MAT 2742 - Correction du Devoir Maison 2

Allan Merino

Exercice 1

Soient p_1 , p_2 , p_3 les portions de macaronis, brocolis et poulet. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} 270p_1 + 51p_2 + 70p_3 & = 400 \\ 10p_1 + 5.4p_2 + 15p_3 & = 30 \\ 2p_1 + 5.2p_2 & = 10 \end{cases}$$

ce qui se réécris comme

$$\begin{cases} 270p_1 + 51p_2 + 70p_3 & = 400 \\ 100p_1 + 54p_2 + 150p_3 & = 300 \\ 20p_1 + 52p_2 & = 100 \end{cases}$$

De la troisième ligne, on obtient que $p_1 = \frac{100-52p_2}{20}$. En remplaçant p_1 dans la deuxième ligne, on obtient que

$$100\left(\frac{100-52p_2}{20}\right) + 54p_2 + 150p_3 = 300\,.$$

Ainsi, $500-260p_2+54p_2+150p_3 = 300$, i.e. $p_3 = \frac{-200+206p_2}{150}$. En remplaçant p_2 et p_3 dans la première ligne, on obtient

$$\frac{27}{2}(100-52p_2) + 51p_2 + \frac{70}{150}(206p_2 - 200) = 400\,.$$

Ainsi, $p_2\left(-26\cdot 27 + 51 + \frac{103\cdot 70}{75}\right) = 400 + \frac{100\cdot 70}{75} - 27\cdot 50$, i.e. $p_2 = 1.544$. Puisque $p_3 = \frac{-200+206p_2}{150}$, on obtient que $p_3 = 0.787$ et en utilisant que $p_1 = \frac{100-52p_2}{20}$, on a $p_1 = 0.9856$.
Ainsi,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9856 \\ 1.544 \\ 0.787 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. La matrice de consommation C est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

La demande intermédiaire créée si l'agriculture prévoit une production de 100 unités est $100c_2$, i.e. $\begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour produire 100 unités, l'agriculture commandera 60 unités du secteur manufacturier, 20 unités de l'agriculture et 10 unités de services.

2. On a

$$\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 & -0.6 \\ -0.3 & 0.8 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C}) &= 0.9 \cdot \det\begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} + 0.6 \cdot \det\begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} - 0.6 \det\begin{pmatrix} -0.3 & 0.8 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \\ &= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.9) - 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 - 0.6 \cdot (0.1 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.8) = \frac{324}{1000}, \end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C}$ est inversible. La comatrice $\mathrm{Com}(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C})$ de $\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C}) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -0.3 & 0.8 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} -0.6 & -0.6 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} -0.6 & -0.6 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.72 & 0.27 & 0.27 \\ 0.60 & 0.63 & 0.27 \\ 0.48 & 0.18 & 0.54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C})^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C})} \mathrm{Com}(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C})^t = \begin{pmatrix} \frac{720}{324} & \frac{600}{324} & \frac{480}{324} \\ \frac{270}{324} & \frac{630}{324} & \frac{180}{324} \\ \frac{270}{324} & \frac{270}{324} & \frac{540}{324} \end{pmatrix}$$

3. On cherche à résoudre $x = \mathrm{C}x + d$, avec $d = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci revient à écrire $(\mathrm{Id}_3 - \mathrm{C})x = d$ et donc $x = (\mathrm{Id} - 3 - \mathrm{C})^{-1}$. Ainsi

$$x = \begin{pmatrix} \frac{720}{324} & \frac{600}{324} & \frac{480}{324} \\ \frac{270}{324} & \frac{630}{324} & \frac{180}{324} \\ \frac{270}{324} & \frac{270}{324} & \frac{540}{324} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.15 \\ 5.56 \\ 3.33 \end{pmatrix}$$

et en arrondissant à l'entier le plus proche, on obtient $x_1 = 8$, $x_2 = 6$ et $x_3 = 3$.

Exercice 3

Posons $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2u_n + \frac{7}{2}u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

i.e. $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{A}\mathrm{X}_n$. En particulier, on a $\mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$. On va donc diagonaliser A. Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$\mathrm{P}_\mathrm{A}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & \frac{7}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{7}{2}\right) - 2 = \lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda - 2\,.$$

Le discriminant Δ de P_A est donné par $\Delta = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4\cdot(-2) = \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$. Ainsi, les racines de P_A sont données par

$$\lambda_1 = \frac{\frac{7}{2}-\frac{9}{2}}{2} = -\frac{1}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{\frac{7}{2}+\frac{9}{2}}{2} = 4\,.$$

En particulier, la matrice A est diagonalisable. On cherche à présent les espaces propres $V_{-\frac{1}{2}}$ et V_4. On a

$$V_{-\frac{1}{2}} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} y & = -\frac{x}{2} \\ 2x+\frac{7}{2}y & = -\frac{y}{2}\end{cases}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\-\frac{x}{2}\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

et

$$V_4 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} y & = 4x \\ 2x+\frac{7}{2}y & = 4y\end{cases}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\4x\end{pmatrix}, x\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.$$

Soient D et P les matrices de $\mathrm{Mat}(2\times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}.$$

La matrice P^{-1} est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

et on a $A = PDP^{-1}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} X_n &= A^nX_0 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\lambda_1^n & \lambda_2^n\\ -\lambda_1^n & 4\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\lambda_1^n+\lambda_2^n & -2\lambda_1^n+2\lambda_2^n\\ -4\lambda_1^n+4\lambda_2^n & \lambda_1^n+8\lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\lambda_1^n+3\lambda_2^n\\ -3\lambda_1^n+12\lambda_2^n\end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}6\lambda_1^n+3\lambda_2^n\\ 6\lambda_1^{n+1}+3\lambda_2^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$u_n = \frac{1}{9}(6\lambda_1^n+3\lambda_2^n) = \frac{2}{3}\frac{(-1)^n}{2^n}+\frac{1}{3}4^n\,, \qquad (n\in\mathbb{N})\,.$$

Exercice 4

1. Posons $Y(t) = \begin{pmatrix}y(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$. On a

$$Y'(t) = \begin{pmatrix}y'(t)\\y''(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y'(t)\\y(t)+3y'(t)\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}}_{=A}\begin{pmatrix}y(t)\\y'(t)\end{pmatrix},$$

   i.e. $Y'(t) = AY(t)$. De nouveau, l'idée est de diagonaliser A. Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda \mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix} = \lambda(\lambda-3)-1 = \lambda^2-3\lambda-1\,.$$

Le discriminant Δ de P_A est donné par $\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) = 13$ et donc les racines de P_A sont données par

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

En particulier, A est diagonalisable. On voit facilement que

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} y & = \lambda_1 x \\ x + 3y & = \lambda_1 y \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$

et de même, $V_{\lambda_2} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Soient D et P les matrices de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ et donc

$$Y'(t) = AY(t) \Leftrightarrow Y'(t) = PDP^{-1}Y(t) \Leftrightarrow P^{-1}Y'(t) = DP^{-1}Y(t) \Leftrightarrow (P^{-1}Y(t))' = D(P^{-1}Y(t)).$$

Posons $Z(t) = P^{-1}Y(t)$ (et $Z(t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$). On a donc $Z'(t) = DZ(t)$, i.e.

$$\begin{cases} z_1'(t) & = \lambda_1 z_1(t) \\ z_2'(t) & = \lambda_2 z_2(t) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \qquad (K_1, K_2 \in \mathbb{R}).$$

Puisque $Z(t) = P^{-1}Y(t)$, on obtient que $Y(t) = PZ(t)$ et donc

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \\ K_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

i.e.

$$y(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

On détermine à présent les constantes K_1 et K_2 en utilisant les conditions initiales. Puisque $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 1 & = K_1 + K_2 \\ 2 & = K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 \end{cases}$$

Puisque $K_1 = 1 - K_2$, on obtient d'après la deuxième équation que $2 = (1 - K_2)\lambda_1 + K_2 \lambda_2$, i.e.

$$K_2 = \frac{2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

et en remplaçant K_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient que

$$K_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Finalement, on obtient

$$y(t) = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

2. (a) Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} -8-\lambda & 4 & 10 \\ -11 & 6-\lambda & 12 \\ -5 & 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-8-\lambda)\det\begin{pmatrix} 6-\lambda & 12 \\ 2 & 7-\lambda \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -5 & 7-\lambda \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} -11 & 6-\lambda \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4
\end{aligned}$$

Ainsi, $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$. On voit facilement que 1 est valeur propre. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$. On obtient donc que $b = 4$ et $-8 = -b + a$, i.e. $a = -4$, Ainsi, on a

$$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2,$$

i.e. $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 2\}$, avec $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$.

(b) On cherche à présent les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2. On a

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -8x + 4y + 10z & = x \\ -11x + 6y + 12z & = y \\ -5x + 2y + 7z & = z \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -9x + 4y + 10z & = 0 \\ -11x + 5y + 12z & = 0 \\ -5x + 2y + 6z & = 0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -9x + 4y + 10z & = 0 \\ \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}z & = 0 \\ -\frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z & = 0 \end{cases}\right\} \quad (L_2 \to L_2 - \frac{11}{9}L_1, L_3 \to L_3 - \frac{5}{9}L_1) \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -9x + 4y + 10z & = 0 \\ y - 2z & = 0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
V_2 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -8x + 4y + 10z & = 2x \\ -11x + 6y + 12z & = 2y \\ -5x + 2y + 7z & = 2z \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -10x + 4y + 10z & = 0 \\ -11x + 4y + 12z & = 0 \\ -5x + 2y + 5z & = 0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -10x + 4y + 10z & = 0 \\ -11x + 4y + 12z & = 0 \end{cases}\right\} \quad (L_1 = L_3, L_2 \to L_2 - L_1)
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,, \begin{cases} -10x + 4y + 10z & = 0 \\ -x + 2z & = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ \frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix} , z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $1 = d_2 < m_2 = 2$, et donc A n'est pas diagonalisable.

(c) Soit P la matrice donnée par

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a

$$\det(\mathrm{P}) = 2\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 1 \,,$$

et donc P est inversible. La comatrice Com(P) de P est donnée par

$$\mathrm{Com(P)} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(d) On a $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

(e) Posons $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. On obtient donc $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$. Puisque $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$, on obtient donc que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}'(t) = \mathrm{DPX}(t)$. En posant $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t)$, avec $\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, on obtient que $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{DY}(t)$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) & = y_1(t) \\ y_2'(t) & = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) & = 2y_3(t) \end{cases}$$

De la première et troisième équation, on obtient

$$y_1(t) = \mathrm{K}_1 e^t \,, \qquad y_3(t) = \mathrm{K}_3 e^{2t} \,, \qquad (t \in \mathbb{R}\,, \mathrm{K}_1\,, \mathrm{K}_3 \in \mathbb{R}) \,.$$

La deuxième équation se réécrit donc comme $y_2'(t) = 2y_2(t) + \mathrm{K}_3 e^{2t}$. Ainsi, on a

$$y_2(t) = \mathrm{K}_2 e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-2s} \mathrm{K}_3 e^{2s} ds \,, \qquad (t \in \mathbb{R}\,, \mathrm{K}_2 \in \mathbb{R}) \,,$$

i.e. $y_2(t) = \mathrm{K}_2 e^{2t} + \mathrm{K}_3 t e^{2t}$. Finalement, on obtient

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1 e^t \\ \mathrm{K}_2 e^{2t} + \mathrm{K}_3 t e^{2t} \\ \mathrm{K}_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

et en utilisant que $\mathrm{X}(t) = \mathrm{PY}(t)$, on a

$$\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{K}_1 e^t \\ \mathrm{K}_2 e^{2t} + \mathrm{K}_3 t e^{2t} \\ \mathrm{K}_3 e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{K}_1 e^t + 4(\mathrm{K}_2 e^{2t} + \mathrm{K}_3 t e^{2t}) + \mathrm{K}_3 e^{2t} \\ 2\mathrm{K}_1 e^t + 5(\mathrm{K}_2 e^{2t} + \mathrm{K}_3 t e^{2t}) + \mathrm{K}_3 e^{2t} \\ \mathrm{K}_1 e^t + 2(\mathrm{K}_2 e^{2t} + \mathrm{K}_3 t e^{2t}) + \mathrm{K}_3 e^{2t} \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) & = 2\mathrm{K}_1 e^t + (4\mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3(1 + 4t))e^{2t} \\ x_2(t) & = 2\mathrm{K}_1 e^t + (5\mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3(1 + 5t))e^{2t} \\ x_3(t) & = \mathrm{K}_1 e^t + (2\mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3(1 + 2t))e^{2t} \end{cases} \qquad (\mathrm{K}_1 , \mathrm{K}_2 , \mathrm{K}_3 \in \mathbb{R}) .$$