MAT 2742 - Midterm 2

Allan Merino

Consignes :

1. La durée de cet examen est de 80 minutes .
2. Aucun document (pdf de cours, exercices etc ..) n'est autorisé durant l'examen .
3. Toute réponse doit être correctement justifiée. Ne donner uniquement la réponse sans justifications ne rapportera aucun point .

Exercice 1 - Vrai ou Faux

Vrai ou Faux ? Justifiez vos réponses (vous pouvez appliquer directement des théorèmes vus en cours) !

1. Les solutions de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ sont de la forme
$$x_n = \mu_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n , \qquad (n \in \mathbb{N}\,, \mu_1\,, \mu_2 \in \mathbb{R})\,.$$

2. Les solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 donnée par $x''(t) = x'(t) + 2x(t)$ sont de la forme
$$x(t) = \mu_1 e^{2t} + \mu_2 t e^{2t}\,, \qquad (t \in \mathbb{R}\,, \mu_1\,, \mu_2 \in \mathbb{R})\,.$$

3. La matrice $\mathrm{P} \in \mathrm{Mat}(5 \times 5)$ donnée par
$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 19 \\ 1 & 5 & 6 & 7 & 19 \\ 1 & 8 & 9 & 10 & 19 \\ 1 & 11 & 12 & 13 & 19 \\ 1 & 14 & 15 & 16 & 19 \end{pmatrix}$$
est inversible.

4. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ donnée par
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le spectre $\mathrm{Spec(A)}$ de A. En déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer les espaces propres V_λ pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec(A)}$. En déduire une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.

3. Soit $\mathscr{S}$ le système différentiel donné par

$$\begin{cases} x_1'(t) & = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) & = 3x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

   (a) Déterminer les solutions générales du système différentiel $\mathscr{S}$. Expliquer soigneusement la méthode utilisée !

   (b) Déterminer l'unique solution du système $\mathscr{S}$ vérifiant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$.

Exercice 3 - Chaînes de Markov

Soit $\Omega = \{0\,,1\}$ l'espace des états :

— 0 : il pleut,

— 1 : il ne pleut pas.

Soit $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la chaîne de Markov homogène sur Ω définie par les propriétés suivantes :

— La probabilité qu'il pleuve demain sachant qu'il a plu aujourd'hui est $\frac{1}{2}$,

— La probabilité qu'il pleuve demain sachant qu'il n'a pas plu aujourd'hui est $\frac{1}{3}$.

1. Déterminer, pour $i\,,j \in \Omega$, les probabilités $P(X_1 = j/X_0 = i)$. Donner la matrice de transition A de la chaîne de Markov.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire les probabilités $P(X_n = j/X_0 = i)$ pour tous $i\,,j \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0/X_0 = 0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1/X_0 = 1)$. Interpréter ces résultats.

Bonus

Soit $\Omega = \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\}$. Ecrire la matrice de transition associée à la chaîne de Markov homogène donnée par