

MAT 2742 - Midterm 1

Allan Merino

Consignes :

1. La durée de cet examen est de 80 minutes .
2. Aucun document (pdf de cours, exercices etc ..) n'est autorisé durant l'examen .
3. Toute réponse doit être correctement justifiée. Ne donner uniquement la réponse sans justifications ne rapportera aucun point .

Exercice 1

1. Vrai/Faux : Est-ce que toute matrice inversible est diagonalisable ? Justifier votre réponse.
2. Vrai/Faux : Est-ce que le produit de deux matrices inversibles de $\text{Mat}(n \times n)$ est inversible ? Justifier votre réponse.
3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
4. Soit $A \in \text{Mat}(n \times n)$. Montrer que le sous-ensemble \mathcal{S} de \mathbb{R}^n donné par

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathbb{R}^n, AX = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

5. Montrer que les vecteurs v_1, v_2, v_3 donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

forment une base de \mathbb{R}^3 .

6. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice A_m donnée par

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Exercice 2

1. (a) Calculer, à l'aide de la méthode de Cramer, la solution du système $AX = b$ où A et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (b) Calculer A^{-1} et vérifier que $A^{-1}b$ vous donne la solution obtenue dans la question précédente .

2. Résoudre le système suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Exercice 3 - Une population d'éléphants roses

On s'intéresse à l'évolution d'une population d'éléphants roses. On note par E_k le nombre d'adultes (par milliers) à l'année k et B_k le nombre de bébés à l'année k . Supposons que chaque année, la moitié des adultes survivent et le moitié des bébés survivent (et deviennent donc adulte). De plus, chaque adulte produit en moyenne trois bébés chaque année.

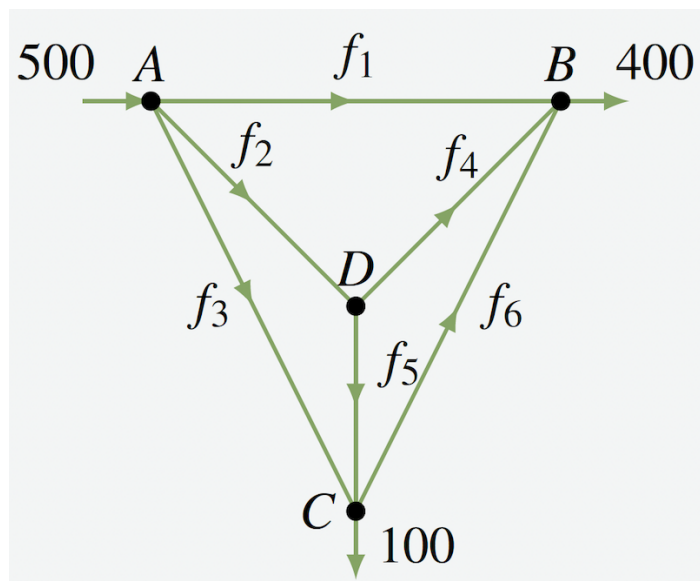
1. Combien obtient-on d'éléphants roses adulte après 1908 années (en fonction de E_0 et B_0) ?
2. Que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$?

Exercice 4 - Flux automobiles

On s'intéresse ici au flux, par heure, sur le circuit automobile suivant : on a 6 rues (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 et r_6) et quatre intersections (A, B, C et D). Chaque heure, 500 véhicules entre par le point A et ressortent via B et C de la manière suivante

- 400 véhicules quittent le circuit par le point B,
- 100 véhicules quittent le circuit par le point C.

On note par f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 le nombre de véhicules passant, par heure, par les routes r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 et r_6 . L'ensemble des informations du problème est résumé dans le schéma suivant :



Trouver les valeurs possibles des flux f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 .

