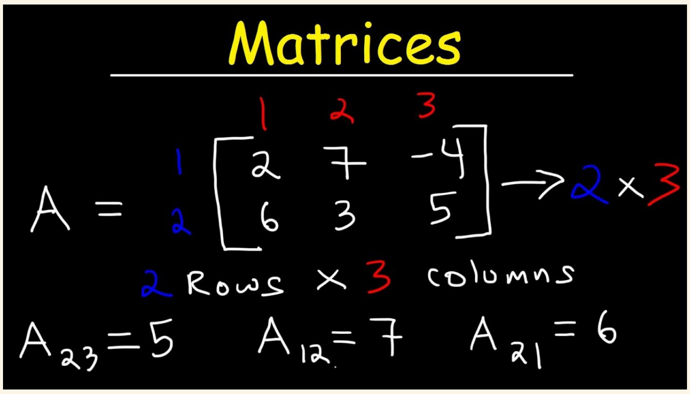
MAT 2742 : Correction des exercices

Allan Merino, Université d'Ottawa

amerino@uottawa.ca



Exercice 1

Soit $\mathscr{S}$ le système d'équations linéaires donné par

$$\mathscr{S} : \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 & = 0 \\ 2u_1 + u_2 - 4u_3 - u_4 & = 0 \end{cases}$$

Soit $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^4$ l'ensemble des solutions de $\mathscr{S}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Clairement $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{U}$. Il faut donc montrer que pour tous $u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{pmatrix}, u' = \begin{pmatrix}u'_1\\u'_2\\u'_3\\u'_4\end{pmatrix} \in \mathrm{U}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u + \lambda u' \in \mathrm{U}$. Par définition,

$$u + \lambda u' = \begin{pmatrix}u_1 + \lambda u'_1\\u_2 + \lambda u'_2\\u_3 + \lambda u'_3\\u_4 + \lambda u'_4\end{pmatrix}.$$

On a

$$(u_1 + \lambda u'_1) + (u_2 + \lambda u'_2) + (u_3 + \lambda'_3) + (u_4 + \lambda u'_4) = \underbrace{(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}_{=0 \text{ car } u \in \mathrm{U}} + \lambda \underbrace{(u'_1 + u'_2 + u'_3 + u'_4)}_{=0 \text{ car } u' \in \mathrm{U}} = 0$$

et

$$2(u_1 + \lambda u'_1) + (u_2 + \lambda u'_2) - 4(u_3 + \lambda u'_3) - (u_4 + \lambda u'_4) = \underbrace{(2u_1 + u_2 - 4u_3 - u_4)}_{=0 \text{ car } u \in \mathrm{U}} + \lambda \underbrace{(2u'_1 + u'_2 - 4u'_3 - u'_4)}_{=0 \text{ car } u' \in \mathrm{U}} = 0\,,$$

i.e. $u + \lambda u' \in \mathrm{U}$, et donc U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Montrer que $\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\mathscr{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ forment des bases de $\mathbb{R}^2$.

Notons $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et $v_2 = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

1. Montrons que $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. On voit tout d'abord que e_1, e_2 forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = xe_1 + ye_2\,,$$

i.e. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\{e_1\,, e_2\}$. Montrons à présent que les vecteurs e_1 et e_2 forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Soient $a\,, b \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + be_2 = 0$ (ici, 0 est l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$, i.e. $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$). Alors

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = ae_1 + be_2 = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\,,$$

i.e. $a = b = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Regardons à présent le cas $\mathscr{B}' = \{e_1\,, v_2\}$. Pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y+y\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix} = (x-y)e_1 + yv_2\,,$$

i.e. $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}\{e_1\,, v_2\}$. Finalement, montrons que les vecteurs e_1 et v_2 forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Soient $a\,, b \in \mathbb{R}$ tels que $ae_1 + bv_2 = 0$. Alors

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = ae_1 + bv_2 = a\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b\\b\end{pmatrix}\,,$$

i.e. $\begin{cases} a+b &= 0 \\ b &= 0 \end{cases}$. De la deuxième équation du système, on obtient que $b = 0$. En remplaçant b dans la première équation, on obtient que $a = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

1. Soit $\mathrm{T} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{T}(0) = 0$.
2. Soit $\mathrm{T} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{T}(x) = ax$.
3. Soit $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{U}\,, \mathrm{V})$.
   (a) On note par Ker(T) le sous-espace de U défini par

   $$\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{u \in \mathrm{U}\,, \mathrm{T}(u) = 0\}\ .$$

   Montrer que Ker(T) est un sous-espace vectoriel de U.
   (b) On note par Im(T) le sous-espace de V défini par

   $$\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = \{\mathrm{T}(u)\,, u \in \mathrm{U}\}\ .$$

   Montrer que Im(T) est un sous-espace vectoriel de U.

1. Notons par 0_U (resp. 0_V) l'élément neutre de U (resp. V). Par définition de 0_U, on a $0_\mathrm{U}+0_\mathrm{U} = 0_\mathrm{U}$. Ainsi, par linéarité, on a :

$$\mathrm{T}(0_\mathrm{U}) = \mathrm{T}(0_\mathrm{U} + 0_\mathrm{U}) = \mathrm{T}(0_\mathrm{U}) + \mathrm{T}(0_\mathrm{U})\,. \tag{1}$$

Par définition d'un espace vectoriel, il existe un élément $-\mathrm{T}(0_\mathrm{U})$ de V tel que $\mathrm{T}(0_\mathrm{U})+(-\mathrm{T}(0_\mathrm{U})) = 0_\mathrm{V}$. Ainsi, en utilisant l'Equation (1), on obtient que

$$\begin{aligned} 0_\mathrm{V} &= \mathrm{T}(0_\mathrm{U}) + (-\mathrm{T}(0_\mathrm{U})) = (\mathrm{T}(0_\mathrm{U}) + \mathrm{T}(0_\mathrm{U})) + (-\mathrm{T}(0_\mathrm{U})) = \mathrm{T}(0_\mathrm{U}) + (\mathrm{T}(0_\mathrm{U})) + (-\mathrm{T}(0_\mathrm{U}))) \\ &= \mathrm{T}(0_\mathrm{U}) + 0_\mathrm{V} = \mathrm{T}(0_\mathrm{U})\,, \end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{T}(0_{\mathrm{U}}) = 0_{\mathrm{V}}$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient par linéarité de T que $\mathrm{T}(\lambda) = \mathrm{T}(\lambda \cdot 1) = \lambda\mathrm{T}(1)$. Ainsi, $a = \mathrm{T}(1)$. Ainsi l'endomorphisme T ne "dépend que" de la valeur de T(1). Cela signifie en particulier que $\mathrm{End}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.
3. (a) Puisque $\mathrm{T}(0) = 0$, on obtient que $0 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. Montrons maintenant que pour tout $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $u_1 + \lambda u_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$. Soient $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, $\mathrm{T}(u_1) = \mathrm{T}(u_2) = 0_{\mathrm{V}}$. Par linéarité, on obtient

$$\mathrm{T}(u_1 + \lambda u_2) = \mathrm{T}(u_1) + \mathrm{T}(\lambda u_2) = \mathrm{T}(u_1) + \lambda\mathrm{T}(u_2) = 0_{\mathrm{V}} + \lambda \cdot 0_{\mathrm{V}} = 0_{\mathrm{V}}\,,$$

i.e. $u_1 + \lambda u_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$.

(b) De nouveau, puisque $\mathrm{T}(0) = 0$, on obtient que $0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$. Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $u_1, u_2 \in \mathrm{U}$ tels que $v_1 = \mathrm{T}(u_1)$ et $v_2 = \mathrm{T}(u_2)$. Ainsi, par linéarité, on obtient

$$v_1 + \lambda v_2 = \mathrm{T}(u_1) + \lambda\mathrm{T}(u_2) = \mathrm{T}(u_1 + \lambda u_2)\,,$$

et puisque $u_1 + \lambda u_2 \in \mathrm{U}$, on obtient que $v_1 + \lambda v_2 \in \mathrm{Im}(\mathrm{T})$.

Exercice 4

1. Montrer que $\mathrm{T} \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0\}$.
2. Montrer qu'un endomorphisme $\mathrm{T} \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ n'admet pas nécessairement d'inverse.
3. Montrer que la somme de deux endomorphismes inversibles de End(V) n'est pas inversible en général.

1. Supposons que $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0\}$. Soient $v_1, v_2 \in \mathrm{V}$ tels que $\mathrm{T}(v_1) = \mathrm{T}(v_2)$. Alors $\mathrm{T}(v_1) - \mathrm{T}(v_2) = 0$, et puisque T est linéaire, on obtient que $\mathrm{T}(v_1 - v_2) = 0$. Ainsi, $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{T})$, et puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0\}$, on obtient que $v_1 - v_2 = 0$, i.e. $v_1 = v_2$, et donc T est injective. Réciproquement, supposons que T est injective. Soit $v \in \mathrm{V}$ tel que $\mathrm{T}(v) = 0$. Puisque $\mathrm{T}(0) = 0$, on obtient par injectivité de T que $v = 0$, i.e. $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0\}$.
2. On voit facilement que l'endomorphisme nul T n'est pas inversible. Plus généralement, on montre facilement que T est inversible si et seulement si $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \{0\}$.
3. Si $\mathrm{T} \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ est inversible, alors l'endomorphisme $-\mathrm{T}$ donné par $(-\mathrm{T})(v) = -\mathrm{T}(v)\,, v \in \mathrm{V}$, est inversible (clairement, $\mathrm{Ker}(\mathrm{T}) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{T})$). Or, $0 = \mathrm{T} + (-\mathrm{T})$ et l'endomorphisme nul n'est pas inversible (point précédent).

Exercice 5

1. Montrer que l'inverse d'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, si il existe, est unique.
2. Montrer que $\left\{\mathrm{E}_{ß,j}\,, 1 \leq i\,, j \leq n\right\}$ est une base de $\mathrm{Mat}(n \times n)$. De plus, montrer que pour tous $1 \leq i\,, j\,, k\,, l \leq n$, on a

$$\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,l} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,l}\,,$$

où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ une matrice inversible. Il existe $B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ tel que $AB = BA = \mathrm{Id}_n$. Montrons que B est unique. Supposons qu'il existe une autre matrice $C \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ tel que $AC = CA = \mathrm{Id}_n$.
   En multipliant l'équation $AB = \mathrm{Id}_n$ par C à gauche, on obtient $CAB = C$. Puisque $CA = \mathrm{Id}_n$, on obtient que $\mathrm{Id}_n B = C$, i.e. $B = C$. Ainsi l'inverse de A est unique.
2. Evident.

Exercice 6

Montrer que les matrices suivantes sont inversible et calculer leurs inverses :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Rappel : $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
On a

$$\begin{aligned} \det(P_1) &= 2\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2\cdot(5\cdot 1 - 2\cdot 1) - 4\cdot(2\cdot 1 - 1\cdot 1) + (2\cdot 2 - 5\cdot 1) \\ &= 2\cdot 3 - 4\cdot 1 - 1 = 1\,, \end{aligned}$$

et donc P_1 est inversible. Pour tous $1 \leq i, j \leq 3$, on note par $P_1^{i,j}$ la matrice de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ obtenue en supprimant la i^{eme}-ligne et la j^{eme}-colonne de P_1. En particulier,

$$P_1^{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1^{1,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1^{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1^{2,1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1^{2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1^{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_1^{3,1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1^{3,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_1^{3,3} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

La comatrice $\mathrm{Com}(P_1)$ de P_1 est la matrice de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ donnée par

$$\mathrm{Com}(P_1) = \begin{pmatrix} \det(P_1^{1,1}) & -\det(P_1^{1,2}) & \det(P_1^{1,3}) \\ -\det(P_1^{2,1}) & \det(P_1^{2,2}) & -\det(P_1^{2,3}) \\ \det(P_1^{3,1}) & -\det(P_1^{3,2}) & \det(P_1^{3,3}) \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\mathrm{Com}(P_1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

L'inverse P_1^{-1} de P_1 est donné par

$$P_1^{-1} = \frac{1}{\det(P_1)}\mathrm{Com}(P_1)^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix}2&4&1\\2&5&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2&-1\\-1&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}=\mathrm{Id}_3 \qquad \begin{pmatrix}3&-2&-1\\-1&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&1\\2&5&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\mathrm{Id}_3$$

Faisons la même chose pour P_2. On développe le déterminant de P_2 par rapport à la première colonne. On a donc

$$\det(P_2)=\det\begin{pmatrix}1&0\\4&6\end{pmatrix}=6\,,$$

et donc P_2 est inversible. De nouveau, pour tous $1\le i\,,j\le 3$, on note par $P_2^{i,j}$ la matrice de $\mathrm{Mat}(2\times 2)$ obtenue en supprimant la i^{eme}-ligne et la j^{eme}-colonne de P_2. En particulier,

$$P_2^{1,1}=\begin{pmatrix}1&0\\4&6\end{pmatrix}\qquad P_2^{1,2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&6\end{pmatrix}\qquad P_2^{1,3}=\begin{pmatrix}0&1\\0&4\end{pmatrix}$$

$$P_2^{2,1}=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}\qquad P_2^{2,2}=\begin{pmatrix}1&3\\0&6\end{pmatrix}\qquad P_2^{2,3}=\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$$

$$P_2^{3,1}=\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}\qquad P_2^{3,2}=\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\qquad P_2^{3,3}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

La comatrice $\mathrm{Com}(P_2)$ de P_2 est la matrice de $\mathrm{Mat}(3\times 3)$ donnée par

$$\mathrm{Com}(P_2)=\begin{pmatrix}\det(P_2^{1,1})&-\det(P_2^{1,2})&\det(P_2^{1,3})\\-\det(P_2^{2,1})&\det(P_2^{2,2})&-\det(P_2^{2,3})\\\det(P_2^{3,1})&-\det(P_2^{3,2})&\det(P_2^{3,3})\end{pmatrix}$$

i.e.

$$\mathrm{Com}(P_2)=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&6&-4\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

L'inverse P_2^{-1} de P_2 est donné par

$$P_2^{-1}=\frac{1}{\det(P_2)}\mathrm{Com}(P_2)^t=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&0&-3\\0&6&0\\0&-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\mathrm{Id}_3 \qquad \begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&4&6\end{pmatrix}=\mathrm{Id}_3\,.$$

Terminons avec la matrice P_3. On développe le déterminant par rapport à la première colonne. On a

$$\det(P_3)=\det\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}=1$$

et donc P_3 est inversible.

On a :

$$P_3^{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_3^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_3^{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3^{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_3^{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_3^{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_3^{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_3^{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_3^{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La comatrice $\mathrm{Com}(P_3)$ de P_3 est la matrice de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ donnée par

$$\mathrm{Com}(P_3) = \begin{pmatrix} \det(P_3^{1,1}) & -\det(P_3^{1,2}) & \det(P_3^{1,3}) \\ -\det(P_3^{2,1}) & \det(P_3^{2,2}) & -\det(P_3^{2,3}) \\ \det(P_3^{3,1}) & -\det(P_3^{3,2}) & \det(P_3^{3,3}) \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\mathrm{Com}(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse P_3^{-1} de P_3 est donné par

$$P_3^{-1} = \frac{1}{\det(P_3)} \mathrm{Com}(P_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}_3 \ .$$

Exercice 7

1. Montrer que le sous-ensemble $GL(n, \mathbb{R})$ de $\mathrm{Mat}(n \times n)$ défini par

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{X \in \mathrm{Mat}(n \times n), \det(X) \neq 0\}$$

   est un groupe.
2. Soient $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ telles que $A \cdot B = 0$. A-t-on $A = 0$ ou $B = 0$?

1. Pour tous $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ (i.e. $\det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0$), on a

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B) \neq 0 ,$$

   i.e. $A \cdot B \in GL(n, \mathbb{R})$. Ainsi $GL(n, \mathbb{R})$ est stable par multiplication. De plus, cette multiplication est associative.
   (a) On a $\mathrm{Id}_n \in GL(n, \mathbb{R})$ (car $\det(\mathrm{Id}_n) = 1$) et pour tous $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $A \cdot \mathrm{Id}_n = \mathrm{Id}_n \cdot A = A$: existence d'un élément neutre.

(b) Soit $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Puisque $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible. Il existe donc $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ tel que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathrm{Id}_n$. Ainsi

$$1 = \det(\mathrm{Id}_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

i.e.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

et donc $\det(A^{-1}) \neq 0$.

Ainsi, $GL(n, \mathbb{R})$ est un groupe (avec la multiplication).

2. Non ! Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Exercice 8

1. Est-ce que les matrices suivantes sont diagonalisables ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Est-ce que la matrice A_4 donnée par

$$A_4 = \begin{pmatrix} 19 & 1 & 1 \\ 0 & 19 & 2 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable ?

3. Est-ce que toute matrice $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ est diagonalisable ?

4. Soit $m \in \mathbb{R}$ et A_5 la matrice donnée par

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

— Que vaut $\mathrm{Spec}(A_5)$?
— Pour quelles valeurs de m la matrice A_5 est-elle diagonalisable ?

1. On cherche le spectre des matrices A_1, A_2 et A_3. On a

$$\begin{aligned}
P_{A_1}(\lambda) &= \det(A_1 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 3-\lambda \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)\cdot((3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1\cdot(-1)) - ((-1)\cdot(1-\lambda) - 1\cdot 1) + 1\cdot((-1)\cdot(-1) - 1\cdot(3-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{Spec}(A_1) = \{1, 2, 2\}$. On ne peut donc pas savoir, à ce point, si la matrice A_1 est diagonalisable. On doit donc étudier la dimension de l'espace propre $V_2 = \mathrm{Ker}(A_1 - 2\,\mathrm{Id}_3)$ associé à la valeur propre 2. On a

$$\mathrm{Ker}(A_1 - 2\,\mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{cases} -x+y+z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ x-y-z &= 0 \end{cases} \right\}.$$

On voit que les trois lignes du système sont identiques. On obtient donc

$$\mathrm{Ker}(A_1 - 2\,\mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x-y-z=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc $\dim(V_2) = 2 = m_2$. Ainsi, d'après le Théorème 5, la matrice A_1 est diagonalisable. Regardons à présent la matrice A_2. On a

$$\begin{aligned}
P_{A_2}(\lambda) &= \det(A_2 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -3\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -3(2(1-\lambda)+2) + (-2-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-2) = -\lambda^3 - \lambda^2 + 10\lambda - 8\,.
\end{aligned}$$

(on a développé le déterminant par rapport à la seconde ligne). On voit facilement que $P_{A_2}(1) = 0$ et $P'_{A_2}(1) \neq 0$. Ainsi, $\lambda_1 = 1$ est une racine de multiplicité 1. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P_{A_2}(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$. On obtient que $b = -8$ et $a = 2$. Le discriminant du polynôme $\lambda^2 + 2\lambda - 8$ est $\Delta = 2^2 - 4\cdot(-8) = 36$ et ses racines sont données par $\lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2}$ et $\lambda_3 = \frac{-2+\sqrt{36}}{2}$, i.e. $\lambda_2 = -4$ et $\lambda_3 = 2$. Ainsi,

$$\mathrm{Spec}(A_2) = \{-4, 1, 2\}\,.$$

En particulier, en utilisant le Corollaire 2.5.7, on obtient que la matrice A_2 est diagonalisable. Finalement, étudions la matrice A_3. On a

$$\begin{aligned}
P_{A_3}(\lambda) &= \det(A_3 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & -4 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (2-\lambda)\,((3-\lambda)(-1-\lambda) + 12) + 2(4(1+\lambda) - 12) \\
&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2
\end{aligned}$$

On obtient de nouveau une racine évidente. On a $P_{A_3}(1) = 0$. De plus, on a $P'_{A_3}(\lambda) = -3\lambda^2+8\lambda-5$ et on voit que $P'_{A_3}(1) = 0$. Finalement, en utilisant que $P''_{A_3}(\lambda) = -6\lambda + 8$, on obtient que $P''_{A_3}(1) = 2 \neq 0$, on obtient que la multiplicité de la racine $\lambda = 1$ est 2. Ainsi, le polynôme P_{A_3} s'écrit comme $P_{A_3}(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - a)$, avec $a \in \mathbb{R}$. En regardant le terme constant du polynôme P_{A_3}, on obtient que $a = 2$ et donc $P_{A_3}(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, i.e. $\mathrm{Spec}(A_3) = \{1, 1, 2\}$.
On regarde alors la dimension de l'espace propre $\mathrm{Ker}(A_3 - \mathrm{Id}_3)$. On a

$$\mathrm{Ker}(A_3 - \mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \begin{cases} x - 4y - 4z & = 0 \\ -2x + 2y + 4z & = 0 \\ -3y - 2z & = 0 \end{cases} \right\} .$$

On utilise la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi,

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3}z \\ -\frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} , z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

i.e. $\dim(V_2) = 1 < m_1 = 2$, i.e. A_3 n'est pas diagonalisable.

2. On voit facilement que

$$P_{A_4}(\lambda) = \det(A_4 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} 19 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 19 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 19 - \lambda \end{pmatrix} = (19 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 19 - \lambda & 2 \\ 0 & 19 - \lambda \end{pmatrix} = (19 - \lambda)^3 .$$

On a une racine triple. Si A_4 était diagonalisable, il existerait donc une matrice inversible P telle que $A_4 = PDP^{-1}$ avec $D = 19\,\mathrm{Id}_3$. Or $PDP^{-1} = 19P\,\mathrm{Id}_3\,P^{-1} = 19PP^{-1} = 19\,\mathrm{Id}_3$, i.e. $A_4 = 19\,\mathrm{Id}_3$, ce qui est incorrect.
Un autre moyen de voir cela est que $d_{19} < m_{19} = 3$. En effet,

$$\mathrm{Ker}(A_4 - 19\,\mathrm{Id}_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} y + z & = 0 \\ 2z & = 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e. $d_{19} = 1$, et donc A_4 n'est pas diagonalisable.

3. Non ! Prenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On voit facilement que $\mathrm{Spec}(A) = \{1\,,1\}$. Or

$$\mathrm{Ker}(A - \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x+y & = x \\ y & = y \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. On cherche à calculer

$$\det(A_5 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-m & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}.$$

Dans la matrice $A_5 - \lambda\,\mathrm{Id}_3$, on remplace la colonne C_1 par $C_1 + C_2$. Le déterminant reste inchangé et on obtient donc

$$\det(A_5 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & 1 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}$$

A présent, on remplace la ligne L_2 par $L_2 - L_1$ (ce qui ne change, de nouveau, pas le déterminant) et on obtient donc

$$\det(A_5 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & m-2 & m-\lambda \end{pmatrix}$$

et finalement, en développant le déterminant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\det(A_5 - \lambda\,\mathrm{Id}_3) = (1-\lambda)(2-\lambda)(m-\lambda)$$

i.e. $\mathrm{Spec}(A_5) = \{1\,,2\,,m\}$. On obtient donc directement que si $m \notin \{1\,,2\}$, la matrice A_5 est diagonalisable.
Il reste donc à étudier les cas $m = 1$ et $m = 2$.
— $\underline{m = 1 :}$ On s'intéresse donc à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dont le spectre est $\{1\,,1\,,2\}$. L'espace propre associé à la la valeur propre 1 est donné par

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\begin{cases} z & = 0 \\ -x+y+z & = 0 \\ x-y & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix},\, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i.e. $\dim V_1 = 1 < m_1 = 2$. Ainsi, la matrice A_5 n'est pas diagonalisable pour $m = 1$.
— $\underline{m = 2 :}$ On s'intéresse donc à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dont le spectre est $\{1\,,2\,,2\}$. L'espace propre associé à la la valeur propre 2 est donné par

$$\mathrm{V}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , \begin{cases} -x+z & = 0 \\ -x+z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} , x\,,y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

i.e. $\dim \mathrm{V}_2 = 2 = m_1$. Ainsi, la matrice A_5 est diagonalisable pour $m = 2$.

Exercice 9

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}(m \times n)$ et $\mathscr{S}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathscr{S} = \{\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \,, \mathrm{AX} = 0\} \,.$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $\mathrm{X}_1\,,\mathrm{X}_2 \in \mathscr{S}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{A}(\mathrm{X}_1 + \alpha\mathrm{X}_2) = \mathrm{AX}_1 + \mathrm{A}(\alpha\mathrm{X}_2) = \mathrm{AX}_1 + \alpha\mathrm{AX}_2 = 0\,,$$

car $\mathrm{AX}_1 = \mathrm{AX}_2 = 0$. Ainsi, $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 2 \\ x_2 + 5x_3 & = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = 9 \end{cases} \qquad \mathscr{S}_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$$

$$\mathscr{S}_3 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = 7 \\ 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 9 \end{cases} \qquad \mathscr{S}_4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 & = 0 \end{cases}$$

Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, les solutions du système suivant :

$$\mathscr{S}_5 : \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 4x_5 & = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 6x_4 - 6x_5 & = 93 \\ x_1 + x_2 & = a \end{cases}$$

Commençons par le système $\mathscr{S}_1$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 & = 2 \\ x_2 + 5x_3 & = 2 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 & = 9 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \frac{1}{5}\mathrm{L}_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{68}{5} \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + 6\mathrm{L}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{68}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{5} \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 5\mathrm{L}_3$$

ce qui implique que l'unique solution du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{68}{5} \\ -11 \\ \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Regardons à présent le système $\mathscr{S}_2$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 3\mathrm{L}_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow (-1)\cdot\mathrm{L}_3\,, \mathrm{L}_2 \leftarrow (-1)\cdot\mathrm{L}_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} x_1 & = -x_4 + 1 \\ x_2 & = -2x_4 - 1 \\ x_3 & = 4x_4 + 2 \end{cases}$$

et donc les solutions du système $\mathscr{S}_2$ sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x_4 + 1 \\ -2x_4 - 1 \\ 4x_4 + 2 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit $\mathscr{S}_3$ le système donné par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = 7 \\ 8x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 9 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 8 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -14 & 22 & 17 \end{array}\right) \qquad \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 8\mathrm{L}_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

La dernière ligne nous donne $0 = -3$. Ainsi, le système n'admet pas de solution.
Finalement, considérons le système $\mathscr{S}_4$ donné par

$$\mathscr{S}_4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 & = 0 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

On a :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{2}L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3$$

On obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 & = \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 & = -x_4 \end{cases}$$

et on obtient donc que l'ensemble des solution du système $\mathscr{S}_4$ est donné par

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ -x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

1. Calculer, à l'aide de la méthode de Cramer, la solution du système $AX = b$ où A et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer A^{-1} et vérifier que $A^{-1}b$ vous donne la solution obtenue dans la question précédente .

1. Tout d'abord, on montre que A est inversible, i.e. $\det(A) \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (4-6) - 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (12-4) = 4 \end{aligned}$$

et donc A est inversible. Soient A_b^1, A_b^2 et A_b^3 les matrices de Mat(3×3) données par

$$A_b^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A_b^1) = 0$ car $2C_1 = C_2$. De même, $\det(A_b^3) = 0$ car $2C_3 = C_2$. Finalement, on a

$$\det(A_b^2) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

et donc l'unique solution du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\det(A_b^1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_b^2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_b^3)}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Commençons par calculer la comatrice de A. On a :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution du système est donnée par

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12

Calculer, à l'aide de la méthode de Cramer, les solutions des systèmes suivants :

$$\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x + 2y & = 4 \\ 2x - y & = 5 \end{cases} \qquad \mathscr{S}_2 : \begin{cases} x + 2y - 3z & = 2 \\ y & = 3 \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{cases} \qquad \mathscr{S}_3 : \begin{cases} x + 2y + 5 & = 6 \\ x + y + z & = 4 \\ 3x + 2y - z & = 1 \end{cases}$$