MAT 2742 - Examen Final

Allan Merino

Instructions :

1. La durée de cet examen est de 3 heures .
2. Aucun document (pdf de cours, exercices etc ..) n'est autorisé durant l'examen .

VRAI ou FAUX

Toute réponse doit être correctement justifiée. Ne donner uniquement la réponse sans justifications ne rapportera aucun point.

1. La solution du système linéaire

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 1 \\ 2x + 4y + z & = 2 \\ x + 6y + z & = 3 \end{cases}$$

est unique et vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$?

2. Les vecteurs v_1 , v_2 , v_3 de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$?

3. Les solutions de la suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$ sont de la forme

$$x_n = \mu_1 \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)^n + \mu_2 \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2} \right)^n , \qquad (n \in \mathbb{N} , \mu_1 , \mu_2 \in \mathbb{R}) \,?$$

4. Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\,\{u_1 , u_2\}$. Soit $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le projeté orthogonal $\hat{y} := \mathrm{pr}_{\mathrm{U}}(y)$ de y sur U est $\hat{y} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 2 \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$?

Exercice 1

On prend deux espèces animales : aigles et souris. On note par A_k et S_k le nombre d'aigles et souris (par milliers) à l'année k. On suppose que

$$\begin{cases} A_{k+1} & = \frac{1}{2}A_k + \frac{1}{2}S_k \\ S_{k+1} & = -\frac{1}{4}A_k + \frac{3}{2}S_k \end{cases}$$

Déterminer le nombre d'aigles et de souris, par milliers, à l'année n, $n \in \mathbb{N}$, en fonction de A_0 et S_0.

Exercice 2

Soit $\mathscr{S}$ le système différentiel donné par

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x_1'(t) & = x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) & = -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) & = x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

1. Résoudre le système différentiel $\mathscr{S}$. Expliquer soigneusement la méthode utilisée.
2. Trouver l'unique solution du système $\mathscr{S}$ vérifiant $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$.

Exercice 3

Soient $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 3)$ et $b \in \mathbb{R}^4$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que le système $AX = b$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer l'ensemble des solutions au sens des moindres carrés du système $AX = b$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(A) := \left\{AX\,,\, X \in \mathbb{R}^3\right\}$.
4. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, déterminer une base orthogonale de $\mathrm{Im}(A)$.
5. Calculer $\widehat{b} := \mathrm{pr}_{\mathrm{Im}(A)}(b)$ (le projeté orthogonal de b sur $\mathrm{Im}(A)$).
6. Résoudre le système $AX = \widehat{b}$. Comparer avec le résultat obtenu à la Question 2. Expliquer.

Exercice 4

Soit Q la forme quadratique donnée par

$$Q(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\,.$$

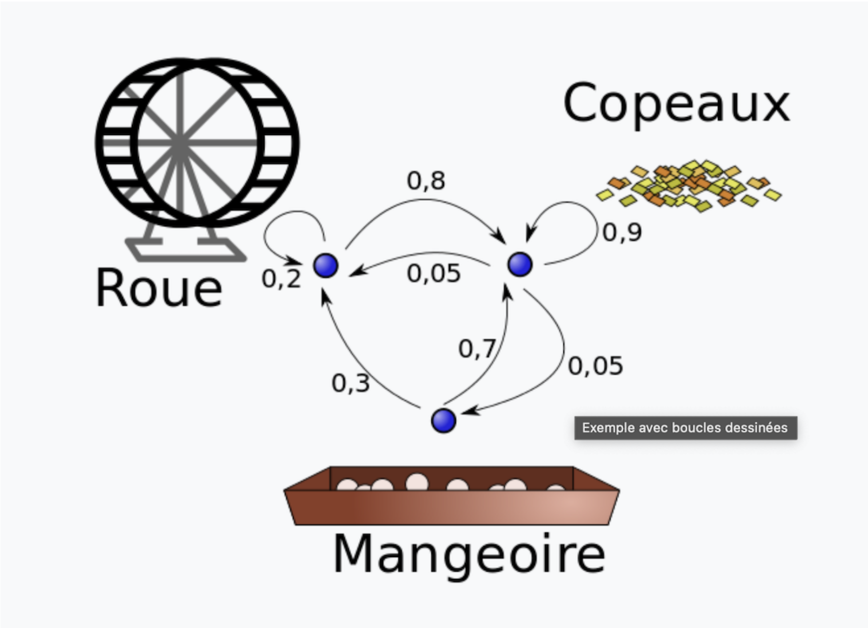
1. Déterminer une matrice symétrique A tel que $Q(x) = x^t A x$.
2. Déterminer Spec(A).
3. Trouver un changement de variable P transformant la forme quadratique Q en une forme quadratique sans terme rectangle.
4. Déterminer $\min\limits_{\|x\|_2=1} Q(x)$ et $\max\limits_{\|x\|_2=1} Q(x)$. Trouver des vecteurs unitaires x_1 et x_2 de $\mathbb{R}^3$ tels que $\min\limits_{\|x\|_2=1} Q(x) = Q(x_1)$ et $\max\limits_{\|x\|_2=1} Q(x) = Q(x_2)$.

Bonus

Doudou le hamster ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, le mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Ses journées sont assez semblables les unes aux autres, et son activité se représente aisément par une chaîne de Markov. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.
Soit $\Omega = \{0, 1, 2\}$ tel que

— 0 : les copeaux où doudou dort,
— 1 : le mangeoire où doudou mange,
— 2 : la roue où doudou fait de l'exercice.

Soit $\{X_n\}$ la chaîne de Markov donnant l'activité de Doudou à la n^{eme} minute donnée par



1. Donner la matrice de transition A associée à la chaîne de Markov.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n$.
   (a) En utilisant le Théorème de Chapman-Kolmogorov, donner une forme explicite de Y_n (en fonction des probabilités conditionnelles $P(X_n = i / X_0 = j)$, $i, j \in \Omega$).
   (b) On admet que $Y := \lim\limits_{n \to +\infty} Y_n$ existe. Montrer que $YA = Y$.
   (c) En utilisant la question précédente, déterminer Y (on notera $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$). Interpréter ce résultat.