



Allan Merino

Le devoir maison est à rendre pour le 10 Novembre (avant midi). Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement. N'oubliez pas d'indiquer votre nom et numéro d'étudiant sur votre copie.

### Exercice 1

Après avoir suivi des cours de diététique, une amatrice de plats préparés de macaroni au fromage décide d'augmenter la quantité de protéines et de fibres de son déjeuner favori en y ajoutant des brocolis et du poulet. Les informations nutritionnelles concernant les produits mentionnés dans cet exercice sont reproduites dans le tableau suivant :

Nutriment	Macaronis	Brocolis	Poulet
Calories	270	51	70
Protéines (g)	10	5.4	15
Fibres (g)	2	5.2	0

(Information nutritionnelle pour une portion)

Quelle proportion de chaque portion de macaronis, de brocolis et de poulet cette personne doit-elle utiliser pour limiter son déjeuner à 400 calories tout en absorbant 30 grammes de protéines et 10 grammes de fibres ?

### Exercice 2

On considère une économie divisée en trois secteurs : produits manufacturés, agriculture et services. Pour une sortie d'une unité, le secteur manufacturier a besoin de 0.10 unité provenant des autres entreprises du secteur, de 0.30 unité de l'agriculture et de 0.30 unité des services. Pour une sortie d'une unité, l'agriculture utilise 0.20 unité de ses propres sorties, 0.60 unité du secteur manufacturier et de 0.10 unité de services. Pour chaque unité de sortie, les services consomment 0.10 unité de services, 0.60 unité de produits manufacturés et aucun produit de l'agriculture.

1. Ecrire la matrice de consommation  $C$  de cette économie et calculer la demande intermédiaire créée si l'agriculture prévoit une production de 100 unités.
2. Est-ce que la matrice  $\text{Id}_3 - C$  est inversible ? Si oui, calculer son inverse.
3. Déterminer les niveaux de production nécessaires pour satisfaire une demande finale de 20 unités de produits manufacturés, 20 unités de produits agricoles et 0 unité de services.

### Exercice 3

Soit  $\{u_n\}_n$  la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} + 2u_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Donner une expression simplifiée de  $u_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 4

1. Résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\begin{cases} y''(t) = 3y'(t) + y(t) \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 10 \\ -11 & 6 & 12 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- (a) Déterminer le spectre de A.
- (b) Pour toute valeur propre  $\lambda \in \text{Spec}(A)$ , calculer l'espace propre associé  $V_\lambda$ .
- (c) Est-ce A est diagonalisable ?
- (d) Soit P la matrice donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

- (e) Soit D la matrice donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Que vaut  $PDP^{-1}$  ?

- (f) Déterminer l'ensemble des solutions du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'_1(t) = -8x_1(t) + 4x_2(t) + 10x_3(t) \\ x'_2(t) = -11x_1(t) + 6x_2(t) + 12x_3(t) \\ x'_3(t) = -5x_1(t) + ax_2(t) + 7x_3(t) \end{cases}$$

