MAT 2742 - Devoir Maison 1

Le devoir maison est à rendre pour le 6 octobre (avant midi) ! Toutes les réponses doivent être justifiées soigneusement. N'oubliez pas d'indiquer votre nom et numéro d'étudiant sur votre copie.

Exercice 1 - *Pour s'échauffer !*

1. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, déterminer le déterminant de la matrice
$$A_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m^2 - 2 & 0 \\ 5 & 0 & m \end{pmatrix}$$
Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?
2. Trouver deux matrices inversibles $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)$ tels que $A \neq \pm B$ et $A + B$ n'est pas inversible.
3. Est-ce que les vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
forment une base de $\mathbb{R}^3$?
4. Montrer que la matrice A donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$
est diagonalisable. **Bonus :** Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2

1. En utilisant la méthode du pivot de Gauss **ET** la méthode de Cramer, résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 5x + 2y - 3z & = -5 \\ -3x - y - 2z & = -1 \\ 5x + 2y - z & = 3 \end{cases}$$
2. Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre m.
$$\begin{cases} x + y + mz & = 0 \\ x + my + z & = 0 \\ mx + y + z & = 0 \end{cases}$$

Exercice 3

Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ donnée par
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Soit P_A le polynôme caractéristique associé à A. Déterminer les racines de P_A. En déduire que A est diagonalisable.
2. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D tel que $A = PDP^{-1}$.
3. Donner une forme explicite de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 - *Quand trois moutons s'amusent !*

Soient trois moutons M_1, M_2 et M_3 qui jouent à saute-mouton. On va placer les moutons dans un plan et les caractériser par leurs coordonnées

$$M_1 = (x_1^0, y_1^0), \qquad M_2 = (x_2^0, y_2^0), \qquad M_3 = (x_3^0, y_3^0).$$

Les règles du jeu sont les suivantes :

- M_1 saute au-dessus de M_2 et la nouvelle position du premier mouton est le symétrique de M_1 par la symétrie de centre M_2,
- M_2 saute au-dessus de M_3 et la nouvelle position du deuxième mouton est le symétrique de M_2 par la symétrie de centre M_3,
- M_3 saute au-dessus de M_1 et la nouvelle position du deuxième mouton est le symétrique de M_3 par la symétrie de centre M_1 (attention, M_1 a déjà sauté, la symétrie est donc faite par rapport à sa nouvelle position !).

On continue le processus en suivant les règles précédentes. On note par (x_1^n, y_1^n), (x_2^n, y_2^n) et (x_3^n, y_3^n) les coordonnées des moutons M_1, M_2 et M_3 après n itérations.
Soient X_n et les Y_n les vecteurs définis par

$$X_n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_3^n \end{pmatrix}, \qquad Y_n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ y_3^n \end{pmatrix}.$$

1. Donner un lien entre X_{n+1} et X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Même question pour Y_{n+1} et Y_n.
2. En déduire un lien entre X_n et X_0. Même question pour Y_n et Y_0.
3. Déterminer une formule explicite de x_1^n, x_2^n et x_3^n et fonction de x_1^0, x_2^0 et x_3^0.
4. A quelle(s) condition(s) sur les positions initiales de M_1, M_2 et M_3 les moutons peuvent-ils sauter à l'infini dans un espace borné du plan ?

Ps : Une correction sera disponible sur brightspace le jeudi 6 octobre à 6pm.