# MAT 2742 - Correction du Midterm 2

**Allan Merino**

## Exercice 1 - Vrai ou Faux

1. **VRAI** - Comme expliqué dans le Chapitre 4, on cherche les racines du polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Le discriminant du polynôme P est $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$ et donc les racines de P sont données par
$$\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
Ainsi, d'après le Théorème 7, l'ensemble des solutions de $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ sont de la forme
$$x_n = \mu_1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu_2 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad (n \in \mathbb{N}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}).$$

2. **FAUX** - Comme expliqué dans le Chapitre 5, on cherche les racines du polynôme $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Le discriminant du polynôme P est $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9 = 3^2$ et donc les racines de P sont données par
$$\lambda_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \qquad \lambda_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$
Ainsi, d'après le Théorème 10, l'ensemble des solutions de $x^{''}(t) = x^{'}(t) + 2x(t)$ sont de la forme
$$x_n = \mu_1 e^{-t} + \mu_2 e^{2t}, \qquad (t \in \mathbb{R}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}).$$

3. **FAUX** - Notons par $C_i$, $1 \leq i \leq 5$, la $i^{me}$ colonne de P. On a $C_5 = 19C_1$, et donc $\det(P) = 0$.

4. **VRAI** Les vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \neq 0$. On a
$$\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ a & a & a \end{pmatrix} = a \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -2a$$
et donc $\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \neq 0$ si et seulement si $a \in \mathbb{R}^*$. Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, les vecteurs $v_1, v_2$ et $v_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$.

## Exercice 2

Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons le spectre Spec(A) de A. Le polynôme caractéristique $P_A$ de A est donné par
$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1) - 6 = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$
Le discriminant de $P_A$ est donné par $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) = 33$ et donc les racines de $P_A$ sont données par
$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}.$$
Ainsi, en utilisant le Corollaire 2.5.7 du cours, la matrice A est diagonalisable.

2. Déterminons les espaces propres $V_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$. On a :

$$\begin{aligned} V_\lambda &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , \begin{cases} x + 2y &= \lambda x \\ 3x + 4y &= y \end{cases}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ \frac{\lambda-1}{2} \end{pmatrix}\right\} \\ &= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda-1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Soient D et P les matrices de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, on a $A = PDP^{-1}$.

3. Soit $\mathscr{S}$ le système différentiel donné par

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= 3x_1(t) + 4x_2(t) \end{cases}$$

(a) Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. On a

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) + 2x_2(t) \\ 3x_1(t) + 4x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = AX(t) ,$$

et donc $X'(t) = AX(t)$. On a

$$X'(t) = AX(t) \Leftrightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \Leftrightarrow (P^{-1}X(t))' = DP^{-1}X(t) ,$$

et en posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$ $\left(Y(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}\right)$, on obtient $Y'(t) = DY(t)$. Ainsi, on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) &= \lambda_2 y_2(t) \end{cases}$$

En utilisant le Chapitre 5 du cours, on obtient donc

$$\begin{cases} y_1(t) &= K_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \qquad (K_1 , K_2 \in \mathbb{R}) .$$

Puisque $Y(t) = P^{-1}X(t)$, on obtient que $X(t) = PY(t)$ et donc

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \lambda_1 - 1 & \lambda_2 - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2K_1 e^{\lambda_1 t} + 2K_2 e^{\lambda_2 t} \\ K_1(\lambda_1 - 1)e^{\lambda_1 t} + K_2(\lambda_2 - 1)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Ainsi, les solutions générales du système $\mathscr{S}$ sont de la forme

$$\begin{cases} x_1(t) &= 2K_1 e^{\lambda_1 t} + 2K_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) &= K_1(\lambda_1 - 1)e^{\lambda_1 t} + K_2(\lambda_2 - 1)e^{\lambda_2 t} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R} , K_1 , K_2 \in \mathbb{R}) .$$

(b) Déterminons les constantes $K_1$ et $K_2$ tels que $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 1$. On résoud donc le système suivant

$$\begin{cases} 1 &= 2K_1 + 2K_2 \\ 1 &= K_1(\lambda_1 - 1) + K_2(\lambda_2 - 1) \end{cases}$$

De la première équation, on obtient que $K_1 = \dfrac{1 - 2K_2}{2}$. En remplaçant $K_1$ dans la deuxième équation, on obtient que

$$\frac{1 - 2K_2}{2}(\lambda_1 - 1) + K_2(\lambda_2 - 1) = 1\,, \qquad \text{i.e. } K_2 = \frac{3 - \lambda_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}\,,$$

et en utilisant que $K_1 = \dfrac{1 - 2K_2}{2}$, on obtient que $K_1 = \dfrac{\lambda_2 - 3}{2(\lambda_2 - \lambda_1)}$.

## Exercice 3 - Chaînes de Markov

1. D'après l'énoncé, on obtient

$$P(X_{n+1} = 0/X_n = 0) = \frac{1}{2}\,, \qquad P(X_{n+1} = 0/X_n = 1) = \frac{1}{3}\,,$$

et en utilisant que $P(X_{n+1} = 1/X_n = 0) = 1 - P(X_{n+1} = 0/X_n = 0)$ et $P(X_{n+1} = 1/X_n = 1) = 1 - P(X_{n+1} = 0/X_n = 1)$, on obtient que

$$P(X_{n+1} = 1/X_n = 0) = \frac{1}{2}\,, \qquad P(X_{n+1} = 1/X_n = 1) = \frac{2}{3}\,.$$

La matrice de transition A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} P(X_1 = 0/X_0 = 0) & P(X_1 = 1/X_0 = 0) \\ P(X_1 = 0/X_0 = 1) & P(X_1 = 1/X_0 = 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique $P_A$ de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\frac{2}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{6} = \lambda^2 - \frac{7}{6}\lambda + \frac{1}{6}\,.$$

On a $\Delta = \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \frac{4}{6} = \frac{49-24}{36} = \frac{25}{36}$. Ainsi,

$$\lambda_1 = \frac{\frac{7}{6} + \frac{5}{6}}{2} = 1\,, \qquad \lambda_2 = \frac{\frac{7}{6} - \frac{5}{6}}{2} = \frac{1}{6}\,.$$

On voit que

$$V_{\frac{1}{6}} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Soient D et P les matrices données par

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{6^n} \\ 1 & -\frac{2}{6^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2-\frac{3}{6^n} & -3+\frac{3}{6^n} \\ -2+\frac{2}{6^n} & -3-\frac{2}{6^n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème de Chapman-Kolmogorov, on obtient

$$P(X_n = 0/X_0 = 0) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5\cdot 6^n}, \qquad P(X_n = 1/X_0 = 0) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5\cdot 6^n},$$

$$P(X_n = 0/X_0 = 1) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5\cdot 6^n}, \qquad P(X_n = 1/X_0 = 1) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5\cdot 6^n}.$$

3. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0/X_0 = 0) = \frac{2}{5}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1/X_0 = 1) = \frac{3}{5}.$$

En conclusion, il pleut 40% du temps !

## Bonus

La matrice de transition de la chaîne de Markov est donnée par :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$