MAT 2742 - Correction Midterm 1

Allan Merino

Exercice 1

1. Faux. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible mais pas diagonalisable.
2. Vrai. Soient $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ deux matrices inversible. En particulier, on a $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$. Puisque $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, on obtient que $\det(AB) \neq 0$, et donc AB est inversible.
3. Si $a = 0$, la matrice est clairement diagonalisable (la matrice est déjà diagonale). Supposons que $a \neq 0$. Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 ,$$

et donc 1 est un valeur propre de A de multiplicité 2. Or, l'espace propre associé est donné par

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{Id}_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , \begin{cases} x + ay & = x \\ y & = y \end{cases} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc A n'est pas diagonalisable car $d_1 = 1 < 2 = m_1$.

4. Pour tous $X_1 , X_2 \in \mathscr{S}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$A(X_1 + \alpha X_2) = AX_1 + A(\alpha X_2) = AX_1 + \alpha AX_2 = 0 ,$$

car $AX_1 = AX_2 = 0$. Ainsi, $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

5. Deux méthodes :
   (a) Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a

$$\det(A) = 2\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(5-2) - 4(2-1) + (4-5) = 1$$

Ainsi, A est inversible et donc ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Deuxième méthode : on montre que la famille $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. On obtient alors le système

$$\begin{cases} 2a + 4b + c & = 0 \\ 2a + 5b + c & = 0 \\ a + 2b + c & = 0 \end{cases}$$

Si on utilise ici que la matrice A est inversible, on obtient que la solution du système est unique et est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sinon, on utilise le pivot de Gauss. On écrit le système sous forme matricielle. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 \,, L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3$$

et donc $a = b = c = 0$. Donc $\{v_1 , v_2 , v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

6. On a

$$\begin{aligned} \det(A_m) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{pmatrix} + m\det\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix} \\ &= (m-1) - (1-m) + m(1-m^2) = (m-1) - (1-m) + m(1-m)(1+m) \\ &= (m-1)(1+1-m(m+1)) = (m-1)(-m^2-m+2) = (m-1)(m-1)(m+2) \end{aligned}$$

et donc A_m est inversible si et seulement si $m \notin \{1 , -2\}$.

Exercice 2

1. (a) Tout d'abord, on montre que A est inversible, i.e. $\det(A) \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot (4-6) - 2 \cdot (2-1) + 1 \cdot (12-4) = 4 \end{aligned}$$

et donc A est inversible. Soient A_b^1 , A_b^2 et A_b^3 les matrices de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ données par

$$A_b^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A_b^1) = 0$ car $2C_1 = C_2$. De même, $\det(A_b^3) = 0$ car $2C_3 = C_2$. Finalement, on a

$$\det(A_b^2) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

et donc l'unique solution du système est donnée par

$$\begin{pmatrix} \frac{\det(A_b^1)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_b^2)}{\det(A)} \\ \frac{\det(A_b^3)}{\det(A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Commençons par calculer la comatrice de A. On a :

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 8 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'unique solution du système est donnée par

$$A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $\mathscr{S}$ le système donné par :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$$

On écrit le système sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow (-1)\cdot L_3\,, L_2 \leftarrow (-1)\cdot L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

On obtient donc le système

$$\begin{cases} x_1 & = -x_4 + 1 \\ x_2 & = -2x_4 - 1 \\ x_3 & = 4x_4 + 2 \end{cases}$$

et donc les solutions du système $\mathscr{S}_2$ sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x_4 + 1 \\ -2x_4 - 1 \\ 4x_4 + 2 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3 - Une population d'éléphants roses

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} E_{k+1} & = \frac{1}{2}E_k + \frac{1}{2}B_k \\ B_{k+1} & = 3E_k \end{cases}$$

Notons $X_k = \begin{pmatrix} E_k \\ B_k \end{pmatrix}$. On a

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} E_{k+1} \\ B_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_k + \frac{1}{2}B_k \\ 3E_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} E_k \\ B_k \end{pmatrix} = AX_k\,,$$

et en particulier, on obtient que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour cela, on va diagonaliser la matrice A. Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\,.$$

Le discriminant du polynôme $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{4}$ est $\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + 6 = \frac{25}{4}$. Ainsi, les racines du polynôme sont données par

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{2} = -1\,, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2} = \frac{3}{2}$$

On détermine à présent les espaces propres V_{-1} et $V_{\frac{3}{2}}$ correspondant aux valeurs propres -1 et $\frac{3}{2}$. On a

$$V_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y & = -x \\ 3x & = -y \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -3x \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

et

$$V_{\frac{3}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y & = \frac{3}{2}x \\ 3x & = \frac{3}{2}y \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Soient D et P les matrices de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

La matrice P est inversible et on a $A = PDP^{-1}$. Calculons P^{-1}. On a

$$\det(P) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = 2 - (-3) = 5 .$$

Ainsi, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = (PDP^{-1})^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0 \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ -3\lambda_1^n & 2\lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2\lambda_1^n + 3\lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ -6\lambda_1^n + 6\lambda_2^n & 3\lambda_1^n + 2\lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} E_0(2\lambda_1^n + 3\lambda_2^n) + B_0(-\lambda_1^n + \lambda_2^n) \\ E_0(-6\lambda_1^n + 6\lambda_2^n) + B_0(3\lambda_1^n + 2\lambda_2^n) \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$E_n = \frac{1}{5} \left(E_0(2\lambda_1^n + 3\lambda_2^n) + B_0(-\lambda_1^n + \lambda_2^n) \right) = \lambda_1^n \left(\frac{2E_0 - B_0}{5} \right) + \lambda_2^n \left(\frac{3E_0 + B_0}{5} \right) .$$

Ainsi, le nombre d'éléphants adulte après 1908 ans (en milliers) est (approximativement) donné par

$$E_{1908} = \left(\frac{2E_0 - B_0}{5} \right) + \left(\frac{3}{2} \right)^{1908} \left(\frac{3E_0 + B_0}{5} \right) .$$

En particulier, on voit facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} E_n = +\infty$.

Exercice 4 - Flux automobiles

Quelles sont les valeurs possibles pour $f_1 , f_2 , f_3 , f_4 , f_5$ et f_6 ? On va écrire les équations que l'on obtient par intersections :

— Intersection A : $f_1 + f_2 + f_3 = 500$,
— Intersection B : $f_1 + f_4 + f_6 = 400$,

— Intersection C : $f_3 + f_5 - f_6 = 100$,
— Intersection D : $f_2 = f_4 + f_5$.

Il faudrait bien évidemment travailler sous des hypothèses supplémentaires (comme par exemple $0 \leq f_i \leq 500$ pour tout i). Nous ne considèrerons pas ces conditions dans cette section. Des égalités obtenues précédemment à chaque intersection, on obtient le système $\mathscr{S}$ suivant :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 & = 500 \\ f_1 + f_4 + f_6 & = 400 \\ f_3 + f_5 - f_6 & = 100 \\ f_2 - f_4 - f_5 & = 0 \end{cases}$$

ou bien sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On commence par écrire la matrice du système sous forme échelonnée.

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -100 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 500 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

$$\textcolor{red}{L_2 \leftarrow (-1)\cdot L_2} \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 100 \end{array}\right)$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 + f_4 + f_6 & = 400 \\ f_2 - f_4 - f_6 & = 0 \\ f_3 + f_5 - f_6 & = 100 \end{cases}$$

On obtient alors que les solutions du système $\mathscr{S}$ sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 400 - f_4 - f_6 \\ f_4 + f_6 \\ 100 - f_5 + f_6 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix}, f_4, f_5, f_6 \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1}$$