MAT 2742 - Correction Examen Final

Allan Merino

VRAI ou FAUX

1. **VRAI** La matrice $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)$ associée au système est donné par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A vaut

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = -2 - 2 + 8 = 4,$$

et donc A est inversible. Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{R}^3$, la solution du système $AX = b$ est unique. Fixons $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. On a

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = b,$$

et donc l'unique solution de $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. **VRAI** Soient v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,$$

et donc $v_1 \perp v_2$. De même, on a $v_1 \perp v_3$ et $v_2 \perp v_3$. Ainsi, en utilisant le Théorème 19 du cours, on obtient que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une famille libre de $\mathbb{R}^3$, et donc une base (par égalité des dimensions). Ainsi, $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$. De plus,

$$\|v_1\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1, \quad \|v_2\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\|v_3\|_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} = 1\,.$$

Ainsi, les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont unitaires et donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

3. **FAUX** Soit $\{x_n\}_n$ la suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$. Il suffit de déterminer les racines du polynôme $\mathrm{P}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. Le discriminant Δ de P est donné par $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot(-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2$. Ainsi, les racines de P sont données par
$$\lambda_1 = \frac{2-4}{2} = -1\,, \qquad \lambda_2 = \frac{2+4}{2} = 3\,.$$
Ainsi, en utilisant le Théorème 7 du cours, les solutions de $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n$ sont de la forme
$$x_n = \mathrm{K}_1(-1)^n + \mathrm{K}_2 3^n\,, \qquad (n\in\mathbb{N}, \mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 \in \mathbb{R})\,.$$

4. **FAUX** Tout d'abord, on voit
$$u_1\cdot u_2 = \begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = 2\cdot(-2)5\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0\,,$$
i.e. $u_1 \perp u_2$. En particulier, $\dim(\mathrm{U}) = 2$ et $\{u_1, u_2\}$ forme une base orthogonale de $\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^3$. Soit $y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Soit $y = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$. Le projeté orthogonal $\hat{y}$ de y sur U est donné par
$$\begin{aligned}\hat{y} &= \frac{y\cdot u_1}{u_1\cdot u_1}u_1 + \frac{y\cdot u_2}{u_2\cdot u_2}u_2 = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\\ &= \frac{9}{30}\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix} + \frac{3}{6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}-1\\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\ 2\\ \frac{1}{5}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 1

Notons $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix}\mathrm{A}_n\\ \mathrm{S}_n\end{pmatrix}$, $n \geq 0$. On obtient donc une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\mathrm{X}_{n+1} = \begin{pmatrix}\mathrm{A}_{n+1}\\ \mathrm{S}_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{A}_n + \frac{1}{2}\mathrm{S}_n\\ -\frac{1}{4}\mathrm{A}_n + \frac{3}{2}\mathrm{S}_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}_{=\mathrm{B}}\begin{pmatrix}\mathrm{A}_n\\ \mathrm{S}_n\end{pmatrix} = \mathrm{B}\mathrm{X}_n\,,$$
i.e. $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{B}\mathrm{X}_n$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\mathrm{X}_n = \mathrm{B}^n\mathrm{X}_0\,.$$

Pour calculer B^n, on va diagonaliser la matrice B. Le polynôme caractéristique P_B de B est donné par

$$P_B(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2}-\lambda \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\left(\frac{3}{2}-\lambda\right) + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{7}{8}\,.$$

Le discriminant de P_B est donné par $\Delta = \frac{1}{2}$, et donc $\mathrm{Spec}(B) = \{\lambda_1\,,\lambda_2\}$, avec

$$\lambda_1 = \frac{2-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

On regarde maintenant les espaces propres. On a

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_1} &= \mathrm{Ker}(B-\lambda_1\mathrm{Id}_2) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, (B-\lambda_1\mathrm{Id}_2)\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} (\frac{1}{2}-\lambda_1)x + \frac{1}{2}y &= 0 \\ -\frac{1}{4}x + (\frac{3}{2}-\lambda_1)y &= 0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}\,, (\frac{1}{2}-\lambda_1)x + \frac{1}{2}y\,, x\in\mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x \\ 2\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)x\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\left(\lambda_1-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$V_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2\left(\lambda_2-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Soient D et P les matrices de $\mathrm{Mat}(2\times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

En particulier, P est inversible et on a $A = PDP^{-1}$. On a

$$\det(P) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,, \qquad \mathrm{Com}(P) = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\mathrm{Com}(P)^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
X_n &= PD^nP^{-1}X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ S_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n & \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ S_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\lambda_2^n & -\lambda_1^n + \lambda_2^n \\ \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\lambda_2^n & -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ S_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} A_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\lambda_2^n\right)A_0 + \left(-\lambda_1^n + \lambda_2^n\right)S_0\right] \\ S_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{2}\lambda_1^n - \frac{1}{2}\lambda_2^n\right)A_0 + \left(-\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_2^n\right)S_0\right] \end{cases}$$

ce qui se réécris comme :

$$\begin{cases} A_n & = \lambda_1^n \left(\frac{A_0}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{S_0}{\sqrt{2}}\right) + \lambda_2^n \left(\frac{A_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) + \frac{S_0}{\sqrt{2}}\right) \\ S_n & = \lambda_1^n \left(\frac{A_0}{2\sqrt{2}} - \frac{S_0}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + \lambda_2^n \left(-\frac{A_0}{2\sqrt{2}} + \frac{S_0}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{cases}$$

Remarque : On peut procéder différemment pour déterminer A_n and S_n. Dans tous les cas, on doit déterminer Spec(B) et P (i.e. les valeurs et vecteurs propres).

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ le vecteur propre correspondant à la valeur propre λ_1. Par définition de λ_1 et v_1, on obtient que $Bv_1 = \lambda_1 v_1$. Ainsi, on a :

$$B^2 v_1 = B(Bv_1) = B(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 B v_1 = \lambda_1^2 v_1 \,.$$

Plus généralement, on a $B^k v_1 = \lambda_1^k v_1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les vecteurs propres $\{v_1\,, v_2\}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, les vecteurs $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ peuvent s'exprimer, de façon unique, comme combinaison linéaire des vecteurs v_1 et v_1. Ainsi, il existe $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tels que

$$e_1 = a_1 v_1 + b v_2 \,, \qquad e_2 = c v_1 + d v_2 \,.$$

On cherche $a_1\,, a_2\,, a_3$ et a_4. On a :

$$e_1 = a_1 v_1 + a_2 v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 & = a_1 + a_2 \\ 0 & = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_1 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_2 \end{cases}$$

De la première équation, on obtient que $a_1 = 1 - a_2$. En remplaçant a_1 dans la deuxième équation, on obtient $0 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(1-a_2) + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_2$, i.e.

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \qquad a_1 = 1 - a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \,.$$

De même,

$$e_2 = a_3 v_1 + a_4 v_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = a_3 + a_4 \\ 1 & = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_3 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_4 \end{cases}$$

De la première équation, on obtient que $a_3 = -a_4$. En remplaçant a_3 dans la deuxième équation, on obtient $1 = -\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_4 + \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) a_4$, i.e.

$$a_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \,, \qquad a_3 = -a_4 = -\frac{1}{2} \,.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} X_n &= B^n X_0 = B^n \begin{pmatrix} A_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = B^n (A_0 e_1 + S_0 e_2) \\ &= B^n \left(A_0(a_1 v_1 + a_2 v_2) + S_0(a_3 e_1 + a_4 e_2)\right) = B^n \left((A_0 a_1 + S_0 a_3) v_1 + (A_0 a_2 + S_0 a_4)\right) \\ &= (A_0 a_1 + S_0 a_3) B^n v_1 + (A_0 a_2 + S_0 a_4) B^n v_2 \\ &= (A_0 a_1 + S_0 a_3) \lambda_1^n v_1 + (A_0 a_2 + S_0 a_4) \lambda_2^n v_2 \\ &= (A_0 a_1 + S_0 a_3) \lambda_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + (A_0 a_2 + S_0 a_4) \lambda_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases} \mathrm{A}_n &= (\mathrm{A}_0 a_1 + \mathrm{S}_0 a_3)\lambda_1^n + (\mathrm{A}_0 a_2 + \mathrm{S}_0 a_4)\lambda_2^n \\ \mathrm{S}_n &= (\mathrm{A}_0 a_1 + \mathrm{S}_0 a_3)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_1^n + (\mathrm{A}_0 a_2 + \mathrm{S}_0 a_4)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\lambda_2^n \end{cases}$$

i.e.

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{A}_n &= \lambda_1^n\left(\frac{\mathrm{A}_0}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\mathrm{S}_0}{\sqrt{2}}\right) + \lambda_2^n\left(\frac{\mathrm{A}_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \frac{\mathrm{S}_0}{\sqrt{2}}\right) \\ \mathrm{S}_n &= \lambda_1^n\left(\frac{\mathrm{A}_0}{2\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{S}_0}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) + \lambda_2^n\left(-\frac{\mathrm{A}_0}{2\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{S}_0}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \end{cases}}$$

Exercice 2

Soit $\mathscr{S}$ le système différentiel donné par

$$\mathscr{S} : \begin{cases} x_1'(t) &= x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

1. Posons $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. On a

$$\mathrm{X}'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) + x_3(t) \\ -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_1(t) + x_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \mathrm{AX}(t)\,,$$

i.e. $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$. On diagonalise A. On commence par déterminer le spectre de A. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1+\lambda) + (1-\lambda)\,((\lambda(\lambda-2)+1) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Spec(A)} = \{0\,,1\,,2\}$. En particulier, la matrice A est diagonalisable. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_0 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \begin{cases} y + z &= 0 \\ -x + 2y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3\,, \begin{cases} -x + y + z &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_2 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ -x + z &= 0 \\ x - z &= 0 \end{cases}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} , z \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{X}'(t) = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{X}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}'(t) = \mathrm{DP}^{-1}\mathrm{X}(t) \\
&\Leftrightarrow \quad (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t))' = \mathrm{D}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t))
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{Y}'(t) = \mathrm{DY}(t)$, avec $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t)$ (on utilisera la notation $\mathrm{Y}(t) := \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$). On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 0 \\ y_2'(t) &= y_2(t) \\ y_3'(t) &= 2y_3(t) \end{cases}$$

et donc

$$\begin{cases} y_1(t) &= \mathrm{K}_1 \\ y_2(t) &= \mathrm{K}_2 e^t \\ y_3(t) &= \mathrm{K}_3 e^{2t} \end{cases} \qquad (\mathrm{K}_1 , \mathrm{K}_2 , \mathrm{K}_3 \in \mathbb{R}).$$

Puisque $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}(t)$, on obtient que $\mathrm{X}(t) = \mathrm{PY}(t)$ et donc

$$\mathrm{X}(t) = \mathrm{PY}(t) = \mathrm{K}_1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{K}_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{K}_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) &= -\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3 e^{2t} \\ x_2(t) &= -\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2 e^t + \mathrm{K}_3 e^{2t} \\ x_3(t) &= \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 e^t + \mathrm{K}_3 e^{2t} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}, \mathrm{K}_1 , \mathrm{K}_2 , \mathrm{K}_3 \in \mathbb{R}).$$

2. On résoud le système suivant :

$$\begin{cases} 1 &= -\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_3 \\ 1 &= -\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3 \\ 1 &= \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 + \mathrm{K}_3 \end{cases}$$

En additionnant la deuxième et troisième équation, on obtient que $\mathrm{K}_3 = 1$. De la première équation, on obtient que $\mathrm{K}_1 = 0$ et en remplaçant dans la deuxième équation, on obtient que $K_2 = 0$. Finalement, l'unique solution $X(t)$ vérifiant $X'(t) = AX(t)$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 3)$ et $b \in \mathbb{R}^4$ donnés par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1. Supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = b$. On a donc le système

$$\begin{cases} x + 3y + 5z & = 3 \\ x + y & = 5 \\ x + y + 2z & = 7 \\ x + 3y + 3z & = -3 \end{cases}$$

   On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$$

   ce qui est impossible (on obtient que $z = 1$ de la troisième équation et $z = 3$ de la quatrième équation).

2. En utilisant le Théorème 22, on a que $\widehat{X}$ est solution $AX = b$ au sens des moindres carrés si et seulement si $A^t A\widehat{X} = A^t b$. On a :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   Ainsi,

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 10 \\ 8 & 20 & 26 \\ 10 & 26 & 38 \end{pmatrix},$$

et

$$A^t b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$A^t A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^t b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 4y + 5z & = 6 \\ 4x + 10y + 13z & = 6 \\ 5x + 13y + 19z & = 10 \end{cases}$$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 10 & 13 & 6 \\ 5 & 13 & 19 & 10 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & \frac{13}{2} & -5 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Ain, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z & = 6 \\ 2y + 3z & = -6 \\ 2z & = 4 \end{cases}$$

On obtient donc que $z = 2$. De plus, $y = -\frac{6+3z}{2}$, et donc $y = -6$. Finalement, puisque $x = \frac{6-4y-5z}{2}$, i.e. $x = 10$. Ainsi, l'unique solution du système au sens des moindres carrés est le vecteur

$$\widehat{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Comme vu dans la Proposition 5, on a $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, c_3)$, où c_1, c_2, c_3 sont les colonnes de A, i.e.

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On détermine à présent une base de Im(A). Pour cela, on va montrer que les colonnes de Im(A) forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tels que $a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 5a_3 & = 0 \\ a_1 + a_2 & = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 & = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 3a_3 & = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on obtient que $a_2 = -a_1$. En remplaçant a_2 dans la première et quatrième équation, on obtient que $-2a_1 + 5a_3 = 0 = -2a_1 + 3a_3$, et donc $a_3 = 0$. Ainsi, $a_1 = 0$ et donc $a_2 = -a_1 = 0$. Finalement, les vecteurs c_1, c_2, c_3 sont libres et donc $\{c_1, c_2, c_3\}$ forment une base de Im(A).

4. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt. Soit $\tilde{c}_2$ le vecteur donné par

$$\tilde{c}_2 = c_2 - \mathrm{pr}_{c_1}(c_2) = c_2 - \frac{c_2 \cdot c_1}{c_1 \cdot c_1} c_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Par construction, on a $c_1 \perp \tilde{c}_2$. Soit $\tilde{c}_3$ le vecteur de Im(A) donné par

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_3 &= c_3 - \mathrm{pr}_{\mathrm{Vect}\{c_1, c_2\}}(c_3) = c_3 - \frac{c_3 \cdot c_1}{c_1 \cdot c_1} c_1 - \frac{c_3 \cdot \tilde{c}_2}{\tilde{c}_2 \cdot \tilde{c}_2} \tilde{c}_2 \\
&= \begin{pmatrix}5\\0\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}5\\0\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix}5\\0\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\0\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De nouveau, $\tilde{c}_3 \perp c_1$ et $\tilde{c}_3 \perp \tilde{c}_2$.

5. Le projeté orthogonal $\widehat{\mathrm{b}} := \mathrm{pr}_{\mathrm{Im(A)}}(\mathrm{b})$ de b sur Im(A) est donné par

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{b}} &= \frac{\mathrm{b} \cdot c_1}{c_1 \cdot c_1} c_1 + \frac{\mathrm{b} \cdot \tilde{c}_2}{\tilde{c}_2 \cdot \tilde{c}_2} \tilde{c}_2 + \frac{\mathrm{b} \cdot \tilde{c}_3}{\tilde{c}_3 \cdot \tilde{c}_3} \tilde{c}_3 \\
&= \frac{\begin{pmatrix}3\\5\\7\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}3\\5\\7\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}3\\5\\7\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \\
&= 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\8\\-2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

6. On résoud le système suivant

$$\mathrm{AX} = \mathrm{b} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} x + 3y + 5z &= 2 \\ x + y &= 4 \\ x + y + 2z &= 8 \\ x + 3y + 3z &= -2 \end{cases}$$

On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

ce qui revient donc à résoudre le système

$$\begin{cases} x + 3y + 5z & = 3 \\ -2y - 5z & = 2 \\ 2z & = 4 \end{cases}$$

et on vérifie facilement que ce système admet une unique solution $\widehat{\mathrm{X}}$ qui est $\widehat{\mathrm{X}} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

Soit Q la forme quadratique donnée par

$$\mathrm{Q}(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3\,.$$

1. On a

$$\mathrm{Q}(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{=\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

et on a $\mathrm{A} = \mathrm{A}^t$, i.e. A est symétrique.

2. Le polynôme caractéristique $\mathrm{P_A}$ de A est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{P_A}(\lambda) &= \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{Id}_2) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ \lambda-1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \quad (\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_2) \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} - (\lambda-1)\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18\,. \end{aligned}$$

On voit que $\mathrm{P_A}(1) = 0$. Ainsi, il existe $a\,,b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P_A}(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$. On voit facilement que a et b vérifie le système suivant

$$\begin{cases} b & = 18 \\ a - b = -27 \end{cases}$$

i.e. $a = -9$ et $b = 18$. Ainsi, $\mathrm{P_A}(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$. Le discriminant du polynôme $\lambda^2 - 9\lambda + 18$ est $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 18 = 81 - 72 = 9$. Ainsi, les racines du polynôme $\lambda^2 - 9\lambda + 18$ sont

$$\lambda_2 = \frac{9-3}{2} = 3\,, \qquad \lambda_3 = \frac{9+3}{2} = 6\,.$$

et donc $\mathrm{Spec(A)} = \{1\,,3\,,6\}$.

3. On cherche tout d'abord les espaces propres associés aux différentes valeurs propres. On a

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 3x + 2y + z & = x \\ 2x + 3y + z & = y \\ x + y + 4z & = z \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x + 2y + z & = 0 \\ 2x + 2y + z & = 0 \\ x + y + 3z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x + 2y + z & = 0 \\ 2x + 2y + 8z & = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 3x + 2y + z & = 3x \\ 2x + 3y + z & = 3y \\ x + y + 4z & = 3z \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2y + z & = 0 \\ 2x + z & = 0 \\ z + y + z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y & = -\frac{z}{2} \\ x & = -\frac{z}{2} \\ x + y + z & = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{2} \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=v_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_6 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 6y \\ 6z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 3x + 2y + z & = 6x \\ 2x + 3y + z & = 6y \\ x + y + 4z & = 6z \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -3x + 2y + z & = 0 \\ 2x - 3y + z & = 0 \\ x + y - 2z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} z & = 3x - 2y \\ z & = -2x + 3y \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3}
\end{aligned}$$

On sait déjà, en utilisant le Lemme 4 du cours, que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont deux à deux orthogonaux. On les normalise. On a

$$\|v_1\|_2 = \sqrt{v_1 \cdot v_1} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\|v_2\|_2 = \sqrt{v_2 \cdot v_2} = \sqrt{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|v_3\|_3 = \sqrt{v_3 \cdot v_3} = \sqrt{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

Soient $\tilde{v}_1$, $\tilde{v}_2$, $\tilde{v}_3$ les vecteurs de V_1 , V_3 et V_6 donnés par

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}, \quad \tilde{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|_2} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Alors $\|\tilde{v}_1\|_2 = \|\tilde{v}_2\|_2 = \|\tilde{v}_3\|_2 = 1$. De plus, ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux.
Soit P et D les matrices données par

$$P = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix}.$$

Alors la matrice P est inversible et vérifie $PP^t = Id_n$. De plus, $A = PDP^t$.
<u>**Changement de variables :**</u> Posons alors $x = Py$, avec $y \in \mathbb{R}^3$. On a alors

$$Q(x) = Q(Py) = (Py)^t A(Py) = y^t \underbrace{P^tP}_{=Id_n} D \underbrace{P^tP} y = y^t Dy = y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 .$$

4. En utilisant le Théorème 25 du cours, on obtient :

$$\min_{\|x\|_2=1} Q(x) = 1 , \qquad \max_{\|x\|_2=1} Q(x) = 6 .$$

De plus, on a $\|\tilde{v}_1\|_2 = 1$ et $A\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1$. Ainsi

$$Q(\tilde{v}_1) = \tilde{v}_1^t A\tilde{v}_1 = \tilde{v}_1^t \tilde{v}_1 = \|\tilde{v}_1\|_2^2 = 1 ,$$

i.e. $\min_{\|x\|_2=1} Q(x) = Q(\tilde{v}_1)$. De même, on a $\|\tilde{v}_3\|_2 = 1$ et $A\tilde{v}_3 = 6\tilde{v}_3$. Ainsi

$$Q(\tilde{v}_3) = \tilde{v}_3^t A\tilde{v}_3 = 6\tilde{v}_3^t \tilde{v}_3 = 6 \|\tilde{v}_3\|_2^2 = 6 ,$$

i.e. $\max_{\|x\|_2=1} Q(x) = Q(\tilde{v}_3)$.

<u>Bonus</u>

1. La matrice de transition A de la chaîne de Markov est donnée par

$$A = \begin{pmatrix}P(X_1 = 0/X_0 = 0) & P(X_1 = 1/X_0 = 0) & P(X_1 = 2/X_0 = 0)\\P(X_1 = 0/X_0 = 1) & P(X_1 = 1/X_0 = 1) & P(X_1 = 2/X_0 = 1)\\P(X_1 = 0/X_0 = 2) & P(X_1 = 1/X_0 = 2) & P(X_1 = 2/X_0 = 2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.9 & 0.05 & 0.05\\0.7 & 0 & 0.3\\0.8 & 0 & 0.2\end{pmatrix}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n$.

(a) D'après le Théorème de Chapman-Kolmogorov, on obtient que

$$A^n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0/X_0 = 0) & P(X_n = 1/X_0 = 0) & P(X_n = 2/X_0 = 0) \\ P(X_n = 0/X_0 = 1) & P(X_n = 1/X_0 = 1) & P(X_n = 2/X_0 = 1) \\ P(X_n = 0/X_0 = 2) & P(X_n = 1/X_0 = 2) & P(X_n = 2/X_0 = 2) \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0/X_0 = 0) & P(X_n = 1/X_0 = 0) & P(X_n = 2/X_0 = 0) \end{pmatrix}.$$

(b) On admet que $Y := \lim_{n \to +\infty} Y_n$ existe. On a

$$YA = \left(\lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^n \right) A = \lim_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^{n+1} = Y$$

i.e. $YA = Y$.

(c) $Y(A - Id_3) = 0$. Notons $Y := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$. De nouveau, $y_1 + y_2 + y_3 = 1$. On a :

$$A - Id_3 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.7 & -1 & 0.3 \\ 0.8 & 0 & -0.8 \end{pmatrix}$$

et donc

$$Y(A - Id_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -0.1y_1 + 0.7y_2 + 0.8y_3 & = 0 \\ 0.05y_1 - y_2 & = 0 \\ 0.05y_1 + 0.3y_2 - 0.8y_3 & = 0 \end{cases}$$

De la deuxième égalité, on obtient que $0.05y_1 = y_2$. En remplaçant y_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient que $-0.1y_1 + 0.7 \cdot 0.05y_1 + 0.8y_3$. Ainsi, $-0.065y_1 + 0.8y_3 = 0$, i.e. $y_3 = \frac{0.065}{0.8}y_1$. Ainsi, la solution y est de la forme

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0.05y_1 & \frac{0.065}{0.8}y_1 \end{pmatrix}$$

pour un certain $y_1 \in]0, 1[$. En utilisant que la somme des trois composantes de y vaut 1, on obtient que

$$y_1 + 0.05y_1 + \frac{0.065}{0.8}y_1 = 1$$

et donc on a $y_1 = 0.8839$. Ainsi, on obtient

$$y = \begin{pmatrix} 0.8839 & 0.0441 & 0.0718 \end{pmatrix}$$

Cela montre qu'à partir d'un certain temps, la loi de probabilité est indépendante de la loi initiale. En conclusion, notre fameux Doudou passe donc 88.4% de son temps à dormir, 4,42% à manger et 7.18% à courir !