

MAT 2742 - Correction du Devoir Maison 2

Allan Merino

Exercice 1

Soient p_1, p_2, p_3 les portions de macaronis, brocolis et poulet. On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} 270p_1 + 51p_2 + 70p_3 & = 400 \\ 10p_1 + 5.4p_2 + 15p_3 & = 30 \\ 2p_1 + 5.2p_2 & = 10 \end{cases}$$

ce qui se réécrit comme

$$\begin{cases} 270p_1 + 51p_2 + 70p_3 & = 400 \\ 100p_1 + 54p_2 + 150p_3 & = 300 \\ 20p_1 + 52p_2 & = 100 \end{cases}$$

De la troisième ligne, on obtient que $p_1 = \frac{100-52p_2}{20}$. En remplaçant p_1 dans la deuxième ligne, on obtient que

$$100\left(\frac{100-52p_2}{20}\right) + 54p_2 + 150p_3 = 300.$$

Ainsi, $500 - 260p_2 + 54p_2 + 150p_3 = 300$, i.e. $p_3 = \frac{-200+206p_2}{150}$. En remplaçant p_2 et p_3 dans la première ligne, on obtient

$$\frac{27}{2}(100 - 52p_2) + 51p_2 + \frac{70}{150}(206p_2 - 200) = 400.$$

Ainsi, $p_2\left(-26 \cdot 27 + 51 + \frac{103 \cdot 70}{75}\right) = 400 + \frac{100 \cdot 70}{75} - 27 \cdot 50$, i.e. $p_2 = 1.544$. Puisque $p_3 = \frac{-200+206p_2}{150}$, on

obtient que $p_3 = 0.787$ et en utilisant que $p_1 = \frac{100-52p_2}{20}$, on a $p_1 = 0.9856$.

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9856 \\ 1.544 \\ 0.787 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. La matrice de consommation C est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

La demande intermédiaire créée si l'agriculture prévoit une production de 100 unités est $100c_2$,

i.e. $\begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$. Ainsi, pour produire 100 unités, l'agriculture commandera 60 unités du secteur ma-

nufacturier, 20 unités de l'agriculture et 10 unités de services.

2. On a

$$\text{Id}_3 - C = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 & -0.6 \\ -0.3 & 0.8 & 0 \\ -0.3 & -0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} \det(\text{Id}_3 - C) &= 0.9 \cdot \det \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} + 0.6 \cdot \det \begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} - 0.6 \det \begin{pmatrix} -0.3 & 0.8 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \\ &= 0.9 \cdot 0.8 \cdot 0.9 - 0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 - 0.6 \cdot (0.1 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.8) = \frac{324}{1000}, \end{aligned}$$

i.e. $\text{Id}_3 - C$ est inversible. La comatrice $\text{Com}(\text{Id}_3 - C)$ de $\text{Id}_3 - C$ est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Com}(\text{Id}_3 - C) &= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} -0.3 & 0 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} -0.3 & 0.8 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} -0.6 & -0.6 \\ -0.1 & 0.9 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & 0.9 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & -0.1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} -0.6 & -0.6 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.3 & 0.8 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.72 & 0.27 & 0.27 \\ 0.60 & 0.63 & 0.27 \\ 0.48 & 0.18 & 0.54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$(\text{Id}_3 - C)^{-1} = \frac{1}{\det(\text{Id}_3 - C)} \text{Com}(\text{Id}_3 - C)^t = \begin{pmatrix} \frac{720}{324} & \frac{600}{324} & \frac{480}{324} \\ \frac{324}{270} & \frac{324}{630} & \frac{324}{180} \\ \frac{324}{270} & \frac{324}{270} & \frac{324}{540} \\ \frac{324}{324} & \frac{324}{324} & \frac{324}{324} \end{pmatrix}$$

3. On cherche à résoudre $x = Cx + d$, avec $d = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \end{pmatrix}$. Ceci revient à écrire $(\text{Id}_3 - C)x = d$ et donc $x = (\text{Id}_3 - C)^{-1}d$. Ainsi

$$x = \begin{pmatrix} \frac{720}{324} & \frac{600}{324} & \frac{480}{324} \\ \frac{324}{270} & \frac{324}{630} & \frac{324}{180} \\ \frac{324}{270} & \frac{324}{270} & \frac{324}{540} \\ \frac{324}{324} & \frac{324}{324} & \frac{324}{324} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.15 \\ 5.56 \\ 3.33 \end{pmatrix}$$

et en arrondissant à l'entier le plus proche, on obtient $x_1 = 8$, $x_2 = 6$ et $x_3 = 3$.

Exercice 3

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. On a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 2u_n + \frac{7}{2}u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix},$$

i.e. $X_{n+1} = AX_n$. En particulier, on a $X_n = A^n X_0$. On va donc diagonaliser A . Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & \frac{7}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda \left(\lambda - \frac{7}{2} \right) - 2 = \lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda - 2.$$

Le discriminant Δ de P_A est donné par $\Delta = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-2) = \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$. Ainsi, les racines de P_A sont données par

$$\lambda_1 = \frac{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}}{2} = 4.$$

En particulier, la matrice A est diagonalisable. On cherche à présent les espaces propres $V_{-\frac{1}{2}}$ et V_4 . On a

$$V_{-\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} y = -\frac{x}{2} \\ 2x + \frac{7}{2}y = -\frac{y}{2} \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -\frac{x}{2} \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$V_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} y = 4x \\ 2x + \frac{7}{2}y = 4y \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Soient D et P les matrices de $\text{Mat}(2 \times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice P^{-1} est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

et on a $A = PDP^{-1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2\lambda_1^n & \lambda_2^n \\ -\lambda_1^n & 4\lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8\lambda_1^n + \lambda_2^n & -2\lambda_1^n + 2\lambda_2^n \\ -4\lambda_1^n + 4\lambda_2^n & \lambda_1^n + 8\lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6\lambda_1^n + 3\lambda_2^n \\ -3\lambda_1^n + 12\lambda_2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6\lambda_1^n + 3\lambda_2^n \\ 6\lambda_1^{n+1} + 3\lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$u_n = \frac{1}{9} (6\lambda_1^n + 3\lambda_2^n) = \frac{2}{3} \frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{1}{3} 4^n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 4

1. Posons $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. On a

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) + 3y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix},$$

i.e. $Y'(t) = AY(t)$. De nouveau, l'idée est de diagonaliser A . Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda - 3) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda - 1.$$

Le discriminant Δ de P_A est donné par $\Delta = 9 - 4 \cdot (-1) = 13$ et donc les racines de P_A sont données par

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

En particulier, A est diagonalisable. On voit facilement que

$$V_{\lambda_1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} y = \lambda_1 x \\ x + 3y = \lambda_1 y \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$

et de même, $V_{\lambda_2} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$. Soient D et P les matrices de $\text{Mat}(2 \times 2)$ données par

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ et donc

$$Y'(t) = AY(t) \Leftrightarrow Y'(t) = PDP^{-1}Y(t) \Leftrightarrow P^{-1}Y'(t) = DP^{-1}Y(t) \Leftrightarrow (P^{-1}Y(t))' = D(P^{-1}Y(t)).$$

Posons $Z(t) = P^{-1}Y(t)$ (et $Z(t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$). On a donc $Z'(t) = DZ(t)$, i.e.

$$\begin{cases} z_1'(t) = \lambda_1 z_1(t) \\ z_2'(t) = \lambda_2 z_2(t) \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad (K_1, K_2 \in \mathbb{R}).$$

Puisque $Z(t) = P^{-1}Y(t)$, on obtient que $Y(t) = PZ(t)$ et donc

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} \\ K_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

i.e.

$$y(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On détermine à présent les constantes K_1 et K_2 en utilisant les conditions initiales. Puisque $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} 1 = K_1 + K_2 \\ 2 = K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 \end{cases}$$

Puisque $K_1 = 1 - K_2$, on obtient d'après la deuxième équation que $2 = (1 - K_2)\lambda_1 + K_2 \lambda_2$, i.e.

$$K_2 = \frac{2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

et en remplaçant K_2 par sa valeur dans la première équation, on obtient que

$$K_1 = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Finalement, on obtient

$$y(t) = \frac{\lambda_2 - 2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}, \quad (t \in \mathbb{R}).$$

2. (a) Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -8 - \lambda & 4 & 10 \\ -11 & 6 - \lambda & 12 \\ -5 & 2 & 7 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-8 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & 12 \\ 2 & 7 - \lambda \end{pmatrix} - 4 \det \begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -5 & 7 - \lambda \end{pmatrix} + 10 \det \begin{pmatrix} -11 & 6 - \lambda \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 \end{aligned}$$

Ainsi, $P_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$. On voit facilement que 1 est valeur propre. Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$. On obtient donc que $b = 4$ et $-8 = -b + a$, i.e. $a = -4$. Ainsi, on a

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

i.e. $\text{Spec}(A) = \{1, 2\}$, avec $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$.

(b) On cherche à présent les espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2. On a

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -8x + 4y + 10z = x \\ -11x + 6y + 12z = y \\ -5x + 2y + 7z = z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -9x + 4y + 10z = 0 \\ -11x + 5y + 12z = 0 \\ -5x + 2y + 6z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -9x + 4y + 10z = 0 \\ \frac{1}{9}y - \frac{2}{9}z = 0 \\ -\frac{2}{9}y + \frac{4}{9}z = 0 \end{cases} \right\} \quad (\mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_2 - \frac{11}{9}\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_3 \rightarrow \mathbf{L}_3 - \frac{5}{9}\mathbf{L}_1) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -9x + 4y + 10z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} V_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -8x + 4y + 10z = 2x \\ -11x + 6y + 12z = 2y \\ -5x + 2y + 7z = 2z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -10x + 4y + 10z = 0 \\ -11x + 4y + 12z = 0 \\ -5x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -10x + 4y + 10z = 0 \\ -11x + 4y + 12z = 0 \end{cases} \right\} \quad (\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_3, \mathbf{L}_2 \rightarrow \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -10x + 4y + 10z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2z \\ \frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $1 = d_2 < m_2 = 2$, et donc A n'est pas diagonalisable.

(c) Soit P la matrice donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\det(P) = 2 \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

et donc P est inversible. La comatrice Com(P) de P est donnée par

$$\text{Com}(P) = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) On a $A = PDP^{-1}$.

(e) Posons $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$. On obtient donc $X'(t) = AX(t)$. Puisque $A = PDP^{-1}$, on obtient

donc que $P^{-1}X'(t) = DPX(t)$. En posant $Y(t) = P^{-1}X(t)$, avec $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$, on obtient que $Y'(t) = DY(t)$, ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

De la première et troisième équation, on obtient

$$y_1(t) = K_1 e^t, \quad y_3(t) = K_3 e^{2t}, \quad (t \in \mathbb{R}, K_1, K_3 \in \mathbb{R}).$$

La deuxième équation se réécrit donc comme $y_2'(t) = 2y_2(t) + K_3 e^{2t}$. Ainsi, on a

$$y_2(t) = K_2 e^{2t} + e^{2t} \int_0^t e^{-2s} K_3 e^{2s} ds, \quad (t \in \mathbb{R}, K_2 \in \mathbb{R}),$$

i.e. $y_2(t) = K_2e^{2t} + K_3te^{2t}$. Finalement, on obtient

$$Y(t) = \begin{pmatrix} K_1e^t \\ K_2e^{2t} + K_3te^{2t} \\ K_3e^{2t} \end{pmatrix}$$

et en utilisant que $X(t) = PY(t)$, on a

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1e^t \\ K_2e^{2t} + K_3te^{2t} \\ K_3e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2K_1e^t + 4(K_2e^{2t} + K_3te^{2t}) + K_3e^{2t} \\ 2K_1e^t + 5(K_2e^{2t} + K_3te^{2t}) + K_3e^{2t} \\ K_1e^t + 2(K_2e^{2t} + K_3te^{2t}) + K_3e^{2t} \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{cases} x_1(t) = 2K_1e^t + (4K_2 + K_3(1 + 4t))e^{2t} \\ x_2(t) = 2K_1e^t + (5K_2 + K_3(1 + 5t))e^{2t} \\ x_3(t) = K_1e^t + (2K_2 + K_3(1 + 2t))e^{2t} \end{cases} \quad (K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{R}).$$

