MAT 2742 - Correction du Devoir Maison 1

Allan Merino

Exercice 1

1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et A_m la matrice de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ donnée par

$$\mathrm{A}_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m^2 - 2 & 0 \\ 5 & 0 & m \end{pmatrix}$$

On calcule $\det(\mathrm{A}_m)$. On développe par rapport à la deuxième ligne. On a

$$\det(\mathrm{A}_m) = (m^2 - 2) \det \begin{pmatrix} m & 1 \\ 5 & m \end{pmatrix} = (m^2 - 2)(m^2 - 5) = (m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2})(m - \sqrt{5})(m + \sqrt{5})\,.$$

En utilisant que A_m est inversible si et seulement si $\det(\mathrm{A}_m) \neq 0$. Ainsi, A_m est inversible si et seulement si $m \in \left\{\pm \sqrt{2}\,, \pm \sqrt{5}\right\}$.

2. Soient A est B les matrices de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ données par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathrm{A}) = -1 = \det(\mathrm{B})$, et donc A et B sont inversibles. Or

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 0$, i.e. $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ n'est pas inversible.

3. On peut voir cela de deux manières. Si on garde les notations de la Question 1, on obtient que $\det(\mathrm{A}_3) \neq 0$. En particulier, A_3 est inversible et donc les vecteurs colonnes de A_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$, i.e. $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
On peut aussi le montrer directement. Tout d'abord, puisque la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3, il suffit de montrer que $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ tel que $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} 3a + c & = 0 \\ 7b & = 0 \\ 5a + 3c & = 0 \end{cases}$$

Ceci implique donc que $b = 0$. De la première équation, on obtient que $c = -3a$ et en remplaçant c par sa valeur dans la troisième équation, on obtient que $-a = 0$, i.e. $a = 0$. Ainsi, $c = 0$ et donc $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ donnée par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique P_A de A est donné par

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$$

et donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1\,,3\}$. Ainsi, d'après le Corollaire 2.5.7.du cours, on obtient que A est diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible P tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1}\,.$$

Pour déterminer P, il suffit de déterminer les espaces propres V_1 et V_3 correspondant aux valeurs propres 1 et 3. On a :

$$\begin{aligned} V_1 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} x+2y & = x \\ 3y & = y \end{cases}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} x & = x \\ y & = 0 \end{cases}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} V_3 &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} x+2y & = 3x \\ 3y & = 3y \end{cases}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,, \begin{cases} -2x+2y & = 0 \\ y & = y \end{cases}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

et on vérifie facilement que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

1. Le but ici est de résoudre le système suivant en utilisant le pivot de Gauss et la méthode de Cramer

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 5x+2y-3z & = -5 \\ -3x-y-2z & = -1 \\ 5x+2y-z & = 3 \end{cases}$$

Commençons par le pivot de Gauss. On écrit le système sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

On écrit la matrice associée au système sous forme échelonnée réduite :

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -5 \\ -3 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{5}L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{19}{5} & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1\,, L_2 \leftarrow 5L_2\,, L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - \frac{2}{5}L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_1 \rightarrow L_1 - 7L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & -19 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$L_2 \rightarrow L_2 + 197L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 56 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Ainsi, on obtient que l'unique solution $\mathscr{S}$ est le point

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 56 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Utilisons à présent la méthode de Cramer. On commence par calculer le déterminant de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} \det(A) &= 5\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 5(1+4) - 2(3+10) - 3(-6+5) = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $\det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible et donc le système linéaire admet une unique solution. Soit $b = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. On note par A_b^1, A_b^2 et A_b^3 les matrices de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ définies par

$$A_b^1 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_b^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_b^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -3 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On calcule à présent les déterminantes des matrices A_b^1, A_b^2 et A_b^3. On a :

$$\begin{aligned} \det(A_b^1) &= -5\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -5(1+4) - 2(1+6) - 3(-2+3) = -42\,, \end{aligned}$$

$$\det(A_b^2) = 5\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 5\det\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \quad 5(1+6)+5(3+10)-3(-9+5)=112\,,$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{A}_b^3) &= 5\det\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix} - 5\det\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\\
&= 5(-3+2)-2(-9+5)-5(-6+5)=8
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant le Théorème 6, on obtient que l'unique solution du système est donnée par

$$\begin{pmatrix}\frac{\det(\mathrm{A}_b^1)}{\det(\mathrm{A})}\\ \frac{\det(\mathrm{A}_b^2)}{\det(\mathrm{A})}\\ \frac{\det(\mathrm{A}_b^3)}{\det(\mathrm{A})}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{-42}{2}\\ \frac{112}{2}\\ \frac{8}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-21\\ 56\\ 4\end{pmatrix}.$$

2. On s'intéresse aux solutions, en fonction de m, du système suivant :

$$\begin{cases} x+y+mz &= 0\\ x+my+z &= 0\\ mx+y+z &= 0\end{cases}.$$

On utilise pour cela la méthode du pivot. On écrit tout d'abord le système sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0\\ 1 & m & 1 & 0\\ m & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

On a :

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0\\ 0 & m-1 & 1-m & 0\\ m & 1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0\\ 0 & m-1 & 1-m & 0\\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0\end{array}\right)$$

Si $m=1$, on voit que les deuxièmes et troisièmes lignes du système ne contiennent que des 0, et donc les solutions du système sont données par

$$\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,,x+y+z=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix},y,z\in\mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\oplus\mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Supposons donc que $m\neq 1$. On a :

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 0\\ 0 & m-1 & 1-m & 0\\ 0 & 0 & (1-m)(m+2) & 0\end{array}\right)$$

— Si $m\neq -2$, on obtient donc que $(1-m)(m+2)\neq 0$ et la troisième équation nous donne que $(1-m)(m+2)z=0$, i.e. $z=0$. La deuxième ligne du système nous donne que $(m-1)y+(1-m)z=0$, i.e. $(m-1)y=(m-1)z=0$, et donc $y=0$ car $z=0$ et $m\neq 1$. Finalement, la première ligne su système nous donne $x+y+mz=0$, i.e. $x=0$ puisque $y=z=0$. Finalement, l'unique solution du système dans le cas $m\neq 1\,,m\neq -2$ est le vecteur nul.

— Si $m=-2$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} x+y-2z &= 0 \\ -3y+3z &= 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x-y &= 0 \\ y &= z \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions du système est donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , x=y , y=z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3

Soit A la matrice de Mat(3×3) donnée par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Le polynôme caractéristique $\mathrm{P_A}$ de A est donné par

$$\begin{aligned} \mathrm{P_A}(\lambda) &= \det(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{Id}_3) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\cdot\left((-1-\lambda)^2 - 4\cdot 2\right) - 2\cdot(0\cdot(-1-\lambda) - 2\cdot(-2)) \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 5\lambda - 1 \end{aligned}$$

On voit facilement que $\mathrm{P_A}(1)=0$ et $\mathrm{P}'_{\mathrm{A}}(1)\neq 0$. Il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P_A}(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 + a\lambda + b)$. On voit facilement que $a=4$ et $b=-1$. Ainsi,

$$\mathrm{P_A} = -(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda-1)\,.$$

Le discriminant du polynôme $\lambda^2+4\lambda-1$ est $\Delta = 20$. Les racines de $\lambda^2+4\lambda-1$ sont donc $\frac{-4-\sqrt{20}}{2}$ et $\frac{-4+\sqrt{20}}{2}$, i.e. $-2-\sqrt{5}$ et $-2+\sqrt{5}$. Ainsi, en utilisant le Corollaire 2.5.7, on obtient que A est diagonalisable.

Remarque : On pouvait calculer le déterminant de manière un peu différente. On peut ajouter des lignes ou des colonnes de manière à ce que le déterminant de la matrice reste inchangé. On a :

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{Id}_3) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} && \mathrm{C_1} \leftarrow \mathrm{C_1}+\mathrm{C_2}+\mathrm{C_3} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} && \mathrm{L_2} \leftarrow \mathrm{L_2}-\mathrm{L_1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1+\lambda)(3+\lambda)-4) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-1)
\end{aligned}
$$

2. Pour déterminer la matrice P, il faut déterminer les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2 - \sqrt{5}$ et $\lambda_3 = -2 + \sqrt{5}$. On a

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , , \begin{cases} -2x+2y & = 0 \\ -2y+2z & = 0 \\ -2x+4y-2z & = 0 \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , , \begin{cases} x & = y \\ y & = z \\ -2x+4y-2z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Soit $\lambda \in \{\lambda_2 , \lambda_3\}$. On sait donc que $\dim(V_\lambda) = 1$. On a :

$$
V_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \begin{cases} -(1+\lambda)x+2y & = 0 \\ -(1+\lambda)y+2z & = 0 \\ -2x+4y-(1+\lambda)z & = 0 \end{cases} \right\}
$$

Puisque

$$
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \begin{cases} -(1+\lambda)x+2y & = 0 \\ -(1+\lambda)y+2z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2y}{1+\lambda} \\ y \\ \frac{(1+\lambda)y}{2} \end{pmatrix} , y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda)}{2} \end{pmatrix}
$$

et que $\dim(V_\lambda) = 1$, on obtient que

$$
V_\lambda = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda)}{2} \end{pmatrix} .
$$

En particulier, on a

$$
V_{\lambda_2} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda_1} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda_1)}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{-1-\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{(-1-\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}
$$

et

$$
V_{\lambda_3} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{1+\lambda_2} \\ 1 \\ \frac{(1+\lambda_2)}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \frac{2}{-1+\sqrt{5}} \\ 1 \\ \frac{(-1+\sqrt{5})}{2} \end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} .
$$

Soient D et P les matrices de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ données par

$$
D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -2+\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 1 & 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} .
$$

On a donc que P est inversible et $A = PDP^{-1}$.

3. On calcule l'inverse P^{-1} de la matrice P. On utilise ici le Théorème 4. On a

$$\begin{aligned}
\det(P) &= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 1 & 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3-\sqrt{5} & -3+\sqrt{5} \\ 1 & 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3-\sqrt{5} & -3+\sqrt{5} \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \det\begin{pmatrix} -3-\sqrt{5} & -3+\sqrt{5} \\ 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} = (-3-\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) - (-3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) \\
&= 4\sqrt{5}
\end{aligned}$$

La comatrice Com(P) de P est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathrm{Com}(P) &= \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{5} \\ 1 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & -1-\sqrt{5} \\ 1 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3+\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1+\sqrt{5} \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & -4+2\sqrt{5} & 4+2\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\mathrm{Com}(P)^t = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -4+2\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ 4+2\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\sqrt{5} & -1+\sqrt{5} \\ 1 & 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -4+2\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ 4+2\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda_2^n & 2\lambda_3^n \\ 1 & -(1+\sqrt{5})\lambda_2^n & (-1+\sqrt{5})\lambda_3^n \\ 1 & (3+\sqrt{5})\lambda_2^n & (3-\sqrt{5})\lambda_3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 4\sqrt{5} \\ -4+2\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \\ 4+2\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} & -3-\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - *Quand trois moutons s'amusent !*

1. Notons $M_1^n = (x_1^n, y_1^n)$, $M_2^n = (x_2^n, y_2^n)$ et $M_3^n = (x_3^n, y_3^n)$. Par construction, on a que M_2^0 est le milieu du segment $M_1^0M_1^1$. Ce qui se traduit, en termes de coordonnées, par

$$x_2^0 = \frac{x_1^0 + x_1^1}{2}, \qquad y_2^0 = \frac{y_1^0 + y_1^1}{2},.$$

i.e. $x_1^1 = 2x_2^0 - x_1^0$ et $y_1^1 = 2y_2^0 - y_1^0$.
De même, M_3^0 est le milieu du segment $M_2^0M_2^1$. Ce qui se traduit, en termes de coordonnées, par

$$x_3^0 = \frac{x_2^0 + x_2^1}{2}, \qquad y_3^0 = \frac{y_2^0 + y_2^1}{2},.$$

i.e. $x_2^1 = 2x_3^0 - x_2^0$ et $y_2^1 = 2y_3^0 - y_2^0$.
Finalement, M_1^1 est le milieu du segment $M_3^0M_3^1$. Ainsi

$$x_1^1 = \frac{x_3^0 + x_3^1}{2}, \qquad y_1^1 = \frac{y_3^0 + y_3^1}{2},$$

i.e. $x_3^1 = 2x_1^1 - x_3^0$ et $y_3^1 = 2y_1^1 - y_3^0$. En utilisant la formule pour x_1^1 et y_1^1 obtenue au-dessus, on a

$$x_3^1 = 2x_1^1 - x_3^0 = 2(2x_2^0 - x_1^0) - x_3^0 = -2x_1^0 + 4x_0^2 - x_3^0, \qquad y_3^1 = -2y_1^0 + 4y_0^2 - y_3^0.$$

Ainsi, on a

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2^0 - x_1^0 \\ 2x_3^0 - x_2^0 \\ -2x_1^0 + 4x_0^2 - x_3^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = AX_0$$

et $Y_1 = AY_0$.
De la même manière, on voit facilement en appliquant le même raisonnement que $X_{n+1} = AX_n$ et $Y_{n+1} = AY_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. De la relation $X_{n+1} = AX_n, n \in \mathbb{N}$, on obtient que $X_n = A^nX_0$. De même, on a $Y_n = A^nY_0$. En particulier, pour calculer A^n, on doit diagonaliser A. Les calculs ont déjà été fait dans l'exercice 3 !

3. La méthode la plus directe : on a déjà calculé A^n dans l'exercice précédent. On peut aussi exprimer la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ comme combinaison linéaire des vecteurs propres $\{v_1, v_2, v_3\}$. Notons

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \\ 3 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Il existe $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$e_1 = a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3, \quad e_2 = a_2v_1 + b_2v_2 + c_2v_3, \quad e_3 = a_3v_1 + b_3v_2 + c_3v_3.$$

Les coefficients a_1, b_1, c_1 sont donnés dans P^{-1}. En effet,

$$e_1 = a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3 \Leftrightarrow P\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$a_1 = -1\,, \qquad b_1 = \frac{-4+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,, \qquad c_1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,,$$
$$a_2 = 1\,, \qquad b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,, \qquad c_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,,$$
$$a_3 = 1\,, \qquad b_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,, \qquad c_3 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}\,.$$

A présent, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_0 &= x_1^0 e_1 + x_2^0 e_2 + x_3^0 e_3 \\
&= x_1^0(a_1v_1 + b_1v_2 + c_1v_3) + x_2^0(a_2v_1 + b_2v_2 + c_2v_3) + x_3^0(a_3v_1 + b_3v_2 + c_3v_3) \\
&= \underbrace{(x_1^0a_1 + x_2^0a_2 + x_3^0a_3)}_{:=\alpha_1} v_1 + \underbrace{(x_1^0b_1 + x_2^0b_2 + x_3^0b_3)}_{:=\alpha_2} v_2 \\
&+ \underbrace{(x_1^0c_1 + x_2^0c_2 + x_3^0c_3)}_{:=\alpha_3} v_3
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_n &= \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0 = \mathrm{A}^n(\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \alpha_3v_3) \\
&= \alpha_1\mathrm{A}^nv_1 + \alpha_2\mathrm{A}^nv_2 + \alpha_3\mathrm{A}^nv_3 \\
&= \alpha_1\lambda_1^nv_1 + \alpha_2\lambda_2^nv_2 + \alpha_3\lambda_3^nv_3 \\
&= \alpha_1\lambda_1^n\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\lambda_2^n\begin{pmatrix}2\\-1-\sqrt{5}\\3+\sqrt{5}\end{pmatrix} + \alpha_3\lambda_3^n\begin{pmatrix}2\\-1+\sqrt{5}\\3-\sqrt{5}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_2^n + 2\alpha_3\lambda_3^n \\ \alpha_1 - \alpha_2(1+\sqrt{5})\lambda_2^n + \alpha_3(-1+\sqrt{5})\lambda_3^n \\ \alpha_1 + \alpha_2(3+\sqrt{5})\lambda_2^n + \alpha_3(3-\sqrt{5})\lambda_3^n\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{cases}
x_1^n &= \alpha_1 + 2\alpha_2\lambda_2^n + 2\alpha_3\lambda_3^n \\
x_2^n &= \alpha_1 - \alpha_2(1+\sqrt{5})\lambda_2^n + \alpha_3(-1+\sqrt{5})\lambda_3^n \\
x_3^n &= \alpha_1 + \alpha_2(3+\sqrt{5})\lambda_2^n + \alpha_3(3-\sqrt{5})\lambda_3^n
\end{cases}$$

On obtient exactement le même résultat pour y_1^n, y_2^n et y_3^n en fonction de y_1^0, y_2^0 et y_3^0.

4. On sait que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_2^n = \infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \lambda_3^n = 0$. Ainsi, si on veut que les moutons sautent dans un domaine borné, il faut que $\alpha_2 = 0$. Or

$$\alpha_2 = (x_1^0b_1 + x_2^0b_2 + x_3^0b_3) = \frac{1}{4\sqrt{5}}\left((-4+2\sqrt{5})x_1^0 + (1-\sqrt{5})x_2^0 + (3-\sqrt{5})x_3^0\right).$$

Ainsi, il suffit de prendre x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0 et y_3^0 qui vérifient

$$(-4+2\sqrt{5})x_1^0 + (1-\sqrt{5})x_2^0 + (3-\sqrt{5})x_3^0 = 0\,, \qquad (-4+2\sqrt{5})y_1^0 + (1-\sqrt{5})y_2^0 + (3-\sqrt{5})y_3^0 = 0\,.$$

On peut donner une interprétation géométriques des positions initiales des moutons M_1^0, M_2^0 et M_3^0 en utilisant la notion de barycentre. Pour ceux qui ont déjà vu cette notion, essayez de voir ce que l'on obtient !

BAAaaaaaaa!