MAT 2525 - Examen intermédiaire 1

Instructions :

1. La durée de cet examen est de 80 minutes. Après cela, vous aurez 10 minutes pour soumettre votre copie sur brightspace. Tout retard dans la soumission entrainera un retrait de point proportionnel au retard .
2. Durant cet examen, vous aurez la possibilité de consulter les documents disponibles sur brightspace (le pdf de cours + notes manuscrites). Il ne sera pas autorisé de :
   — Consulter d'autres pages internet ,
   — Recevoir une aide extérieure ,
   — De discuter ou de partager avec d'autres .
   Un non-respect de ces règles sera signalé sans exception .
3. Toute réponse doit être correctement justifiée. Ne donner uniquement la réponse sans justifications ne rapportera aucun point .
4. Durant toute la durée de l'examen, vous devez resté connecté sur zoom, avec votre caméra allumée et le micro éteint .

Exercice 1

1. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathrm{E} = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{3m}, n, m \in \mathbb{N}^* \right\} .$$

   En utilisant la définition vue en cours, déterminer inf(E) et sup(E).

2. Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par $x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{n+8} = x_n$.
   (b) Déterminer $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left|x^2 + 4x + 2\right| = 1$.
2. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ donné par

$$\mathrm{E} = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x^2 + 4x + 3 < 0 \right\} .$$

   Déterminer inf(E) et sup(E) .

Exercice 3

1. Donner un exemple de suite réelle bornée possédant trois suites extraites $\{x_{\phi_1(n)}\}_n$, $\{x_{\phi_2(n)}\}_n$ et $\{x_{\phi_3(n)}\}_n$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\phi_1(n)} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} x_{\phi_2(n)} = \pi\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} x_{\phi_3(n)} = \sqrt{19}\,.$$

2. Montrer, en utilisant la définition de la limite vue en cours, que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} = 0\,.$$

3. Trouver une suite convergente $\{x_n\}_n$ telle que $x_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ mais tel que $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ soit irrationnel (c.a.d. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). (**Indication :** La réponse est dans le devoir maison !).

4. Trouver deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ semi-convergentes (i.e. convergentes mais non absolument convergentes) tel que $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ est absolument convergente.

Exercice 4

Soit $\{x_n\}_n$ une suite définie par

$$x_0 = 0\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq x_n < 2$.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.
3. Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5

1. Soit $a > 0$. Etudier la convergence ou divergence, en fonction de a, des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{n^2}}{n^n}\,.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$ converge et déterminer sa valeur.

BONNE CHANCE !