MAT 2525 - Examen Final

Allan Merino

Instructions :

1. La durée de cet examen est de *3 heures*. Après cela, vous aurez 10 minutes pour soumettre votre copie sur brightspace. **Tout retard dans la soumission entrainera un retrait de point proportionnel au retard** .
2. Durant cet examen, vous aurez la possibilité de consulter les documents disponibles sur brightspace (le pdf de cours + notes manuscrites). Il ne sera pas autorisé de :
   — Consulter d'autres pages internet ,
   — Recevoir une aide extérieure ,
   — De discuter ou de partager avec d'autres .
   Un non-respect de ces règles sera signalé sans exception .
3. Toute réponse doit être correctement justifiée. Ne donner uniquement la réponse sans justifications ne rapportera aucun point .
4. Durant toute la durée de l'examen, vous devez resté connecté sur zoom, avec votre caméra allumée et le micro éteint .
5. N'oubliez pas d'écrire votre nom, prénom et numéro d'étudiant en haut de votre copie.

Exercice 1 - VRAI/FAUX

Est-ce que les propositions suivantes sont vraies ou fausses ? Justifiez rapidement.

1. **BONUS :** Les séries entières $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} (-1)^n a_n x^n$ ont le même rayon .
2. Soit $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ mais $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0) = \infty$.
3. **BONUS :** L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\sqrt{6}} \frac{\sin(x)}{x - \frac{x^3}{6}} dx$ est convergente .
4. Soit $\sum_{n=4}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R $\neq 0$. Alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 2

1. Déterminer la nature de l'intégrale impropre suivante
$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(e^t - 1)(e^{-t} + 1)} dt \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$
   BONUS : Même question pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$, avec $0 < a < b$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale impropre $\mathscr{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

(b) En utilisant une intégration par parties, établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un lien entre $\mathscr{J}_n$ et $\mathscr{J}_{n-1}$.

(c) En déduire que $\mathscr{J}_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^3} x^n \,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n \,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n^2} x^n \,.$$

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ où $\{a_n\}_n$ est la suite déterminée par

$$a_0 = 1 \,, \quad a_1 = 2 \,, \quad a_{n+2} = \frac{7}{3} a_{n+1} - \frac{2}{3} a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \,.$$

Exercice 4

Soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0\,,1]$ par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Montrer que $\{f_n\}_n$ converge simplement sur $[0\,,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale

$$\mathscr{I}_n = \int_0^1 f_n(t) dt \,.$$

(*Indication :* On pourra utiliser que la dérivée de $\ln(u(x))$ est $\frac{u'(x)}{u(x)}$, $u > 0$)

3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \mathscr{I}_n$ et en déduire que la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,,1]$.
4. **BONUS :** Calculer $\sup_{x \in [0\,,1]} |f_n(x)|$ et déduire de nouveau que la suite de fonctions $\{f_n\}_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0\,,1]$.

Exercice 5

Soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Notons $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que la fonction S est continue.
3. Montrer que

$$\int_0^{\pi} \mathrm{S}(x) dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \,.$$

(*Indication :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$).

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{S}'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \,.$$

5. En déduire que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} .$$
(*Indication :* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\pi) = 0$ et $\sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$).

Exercice 6

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme (lorsque cela a un sens) de la série entière suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n ,$$
(*Indication :* Smplifier $\frac{n^2}{n!}$ et utiliser que $n = (n-1) + 1$).

BONUS : Même question pour la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n+2}$ (on pourra utiliser la formule vue en cours pour la somme des termes d'une suite géométrique) .