

# MAT 2525 - Devoir Maison 1

## Exercice 1

- (5 points) Soit  $\{x_n\}_n$  une suite réelle telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ . Montrer que la suite  $\left\{\frac{x_n}{1+x_n}\right\}_n$  converge. La réciproque est-elle vraie ?
- Calculer, à l'aide de la définition vue en cours, la limite des suites suivantes :
  - $x_n = \frac{1}{n^\alpha}, n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}, (5 \text{ points})$
  - $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, n \geq 1, (6 \text{ points})$
- (5 points) En utilisant le Théorème du Sandwich, montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$ .
- (5 points) Donner cinq exemples de suites bornées telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 0$ .

## Exercice 2

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\{x_n\}_n$  la suite définie par

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx) = \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}.$$

Montrer que  $\{x_n\}_n$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{x}{2}$ . (10 points)

## Exercice 3

- Soit  $\{x_n\}_n$  la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = \frac{7}{2}x_{n+1} + 2x_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (5 points) Donner une expression simplifiée de  $x_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (2 points) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ .
  - (2 points) Est-ce que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$  existe ? Si oui, déterminer la limite.
- Peut-on trouver des réels  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que la suite récurrente linéaire d'ordre 2  $\{x_n\}_n$  donnée par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

satisfaisant :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$ ,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1908}{\pi^3}$  ? (4 points)

## Exercice 4

Soit  $\{x_n\}_n$  la suite définie, pour tout  $n \geq 1$ , par

$$x_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}}.$$

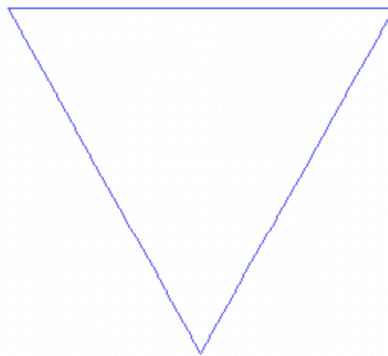
1. (6 points) Montrer que la suite  $\{x_n\}_n$  est croissante (on pourra raisonner par récurrence).
2. (6 points) Montrer que  $\sqrt{n} \leq x_n < \sqrt{n} + 1$  pour tout  $n \geq 1$ .
3. (4 points) Montrer que la suite  $\{\frac{x_n}{n+1}\}_n$  converge vers 0.
4. (4 points) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$x_n - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left( \sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} - 1 \right).$$

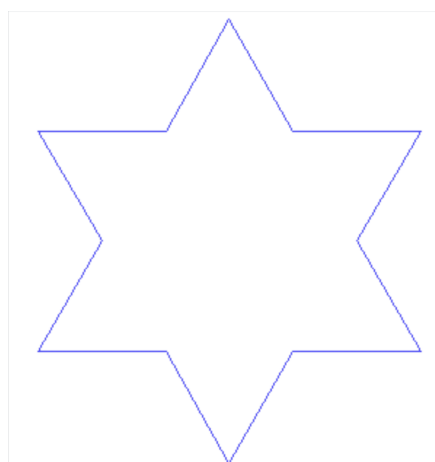
5. **BONUS :** Soit  $\{y_n\}_n$  la suite définie par  $y_n = x_n - \sqrt{n}, n \geq 1$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{2}$ . (8 points)

## Exercice 5

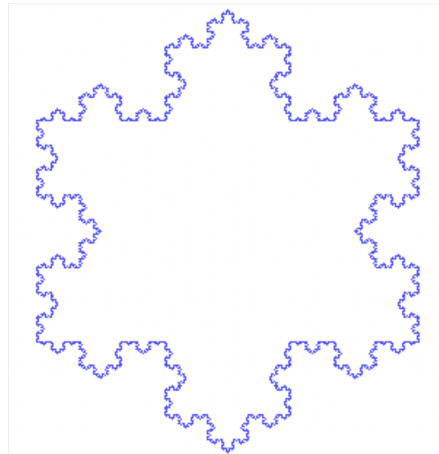
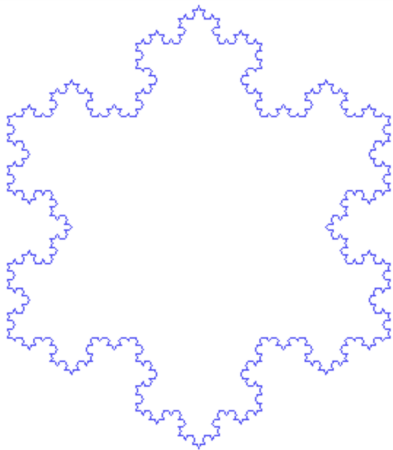
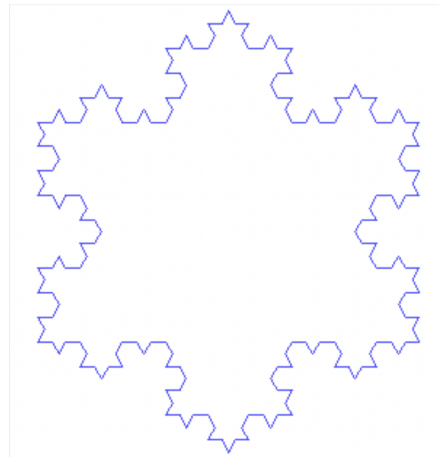
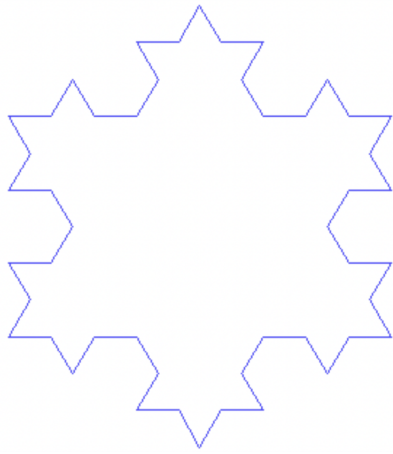
Soit  $\mathcal{F}_0$  le triangle équilatéral suivant



Pour simplifier, on suppose que la longueur de la base du triangle  $\mathcal{F}_0$  est 1. On construit à présent  $\mathcal{F}_1$ . On coupe chacun des côtés du triangles  $\mathcal{F}_0$  en trois parts égales. On remplace le segment du milieu de chaque côtés par un triangle équilatéral comme suit :



On réitère ce processus "indéfiniment". Les figures suivantes représentent  $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$  et  $\mathcal{F}_5$ .



A la suite de figures géométriques  $\{\mathcal{F}_n\}_n$ , on associe les suites suivantes :

- $\{c_n\}_n$ , où  $c_n$  est le nombre de côtés de  $\mathcal{F}_n$ ,
- $\{l_n\}_n$ , où  $l_n$  est la longueur d'un côté de  $\mathcal{F}_n$  (tous les côtés de  $\mathcal{F}_n$  ayant la même longueur),
- $\{\mathcal{P}_n\}_n$ , où  $\mathcal{P}_n$  est le périmètre de  $\mathcal{F}_n$ ,
- $\{\mathcal{A}_n\}_n$ , où  $\mathcal{A}_n$  est l'aire de  $\mathcal{F}_n$ .

1. (4 points) Montrer que les suites  $\{c_n\}_n$  et  $\{l_n\}_n$  sont géométriques et préciser leurs raisons respectives.
2. (2 points) Donner une expression simplifiée de  $\mathcal{P}_n$  en fonction des suites  $c_n$  et  $l_n$ .
3. (2 points) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{P}_n = +\infty$ .
4. (5 points) Etablir une relation entre  $\mathcal{A}_{n+1}$  et  $\mathcal{A}_n$  en fonction des suites  $\{c_n\}$  et  $\{l_n\}_n$ .
5. (6 points) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \frac{8}{5}\mathcal{A}_0$ .

### **Exercice 6**

Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$  converge et déterminer sa valeur. (2 + 10 = 12 points)