MAT 2525 - DGD 6 - Suites de fonctions

Allan Merino

Exercice 1

1. *Soient* $\{f_n\}_n$ *et* $\{g_n\}_n$ *les suites de fonctions définies sur* $[0\,,1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 3n^2x & \text{si } x \in \left[0\,, \frac{1}{2n}\right] \\ -3n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left]\frac{1}{2n}\,, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}\,, 1\right] \end{cases} \qquad g_n(x) = nx(1-x^2)^n\,.$$

   Etudier la convergence simple et uniforme de $\{f_n\}_n$ *et* $\{g_n\}_n$.

2. *Soit* $a \in \mathbb{R}^*$ *et soit* $\{f_n\}_n$ *la suite de fonctions de* $\mathbb{R}$ *donnée par*

$$f_n(x) = \frac{a^2}{a^2 + n^2x^2}\,.$$

   Etudier la convergence simple et uniforme de $\{f_n\}_n$.

Exercice 2

Soit $\{f_n\}_n$ *la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f_n(x) = \frac{n^2x}{1 + n^5x^2}\,.$$

Montrer que $\{f_n\}_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f *que l'on déterminera et montrer que* $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$.

Exercice 3

Soit $\{f_n\}_n$ *la suite de fonctions définie sur* $[0\,,+\infty[$ *par* $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$. *Montrer que* $\{f_n\}_n$ *converge simplement (et uniformément) vers une fonction* f *que l'on déterminera.*

Exercice 4

Soit $\{f_n\}_n$ *la suite de fonctions définies sur* $[0\,,1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in \left[0\,, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}\,, 1\right] \end{cases}$$

1. *Montrer que* $\{f_n\}_n$ *converge simplement vers* f *que l'on déterminera.*
2. *Calculer* $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. *En déduire que* $\{f_n\}$ *ne converge pas uniformément vers* f *sur* $[0\,,1]$.
3. *Soit* $a \in \,]0\,,1]$. *Etudier la convergence uniforme sur* $[a\,,1]$.

Exercice 5

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n = e^{-nx}\sin(2nx)\,, \qquad g_n = \frac{1}{(1+x^2)^n}\,.$$

Que peut-on dire de la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$?

Exercice 6

Soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions définie sur $[0\,,1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

1. *Montrer que $\{f_n\}_n$ converge uniformément sur $[0\,,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera. Est-ce que f est dérivable ?*
2. *Montrer que $\{f_n'\}_n$ converge simplement vers $[0\,,1]$ vers une fonction g que l'on déterminera.*
3. *Puisque $f' \neq g$, est-ce une contradiction avec le théorème vu en cours ?*