MAT 2525 - DGD 4 - Topologie, Limite et Continuité de Fonctions

Allan Merino

Exercice 1 – Lois de Morgan

Pour tout sous-ensembles X, Y *de* Z*, on a*

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c \,, \qquad (X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c \,.$$

Exercice 2 – Espaces ouverts & fermés

1. *Est-ce que l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R} \,, |x-1| < 2\}$ *est ouvert ?*
2. *Peut-on trouver deux sous-ensembles non-ouverts* A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $A \cap B$ *est ouvert ?*
3. *Déterminer les points d'accumulation de*

$$E_1 = \left\{1 + \frac{2}{n} \,, n \in \mathbb{N}^*\right\} \,, \qquad E_2 = \{x \in \mathbb{Q} \,, 0 < x < \pi\} \,.$$

   Les ensembles E_1 *et* E_2 *sont-ils fermés ?*

Exercice 3 – Espaces Compacts

1. *Montrer que pour des sous-espaces compacts* $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ *de* $\mathbb{R}$*, les espaces* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ *et* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ *sont compacts. Est-ce valable pour un nombre infini d'espaces ?*
2. *Soit* E *un sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on note* $E_x = \{x + y \,, y \in \mathbb{R}\}$*. Montrer que*
   (a) E *est ouvert si et seulement si* E_x *est ouvert.*
   (b) E *est compact si et seulement si* E_x *est compact.*

Exercice 4

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. En utilisant la définition vue en cours, montrer que pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$*.*
2. *Soit* P *un polynôme réel. Montrer que pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$*.*

Exercice 5

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = E(x)$*, où* E *est la fonction partie entière. Montrer que* f *admet une limite au point* x_0 *si et seulement si* $x_0 \notin \mathbb{Z}$*.*

Exercice 6

1. *En utilisant la définition vue en cours, montrer que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2}.$$

2. *Pour quelles valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ \alpha & si\ x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 7 – Continuité de fonctions

1. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

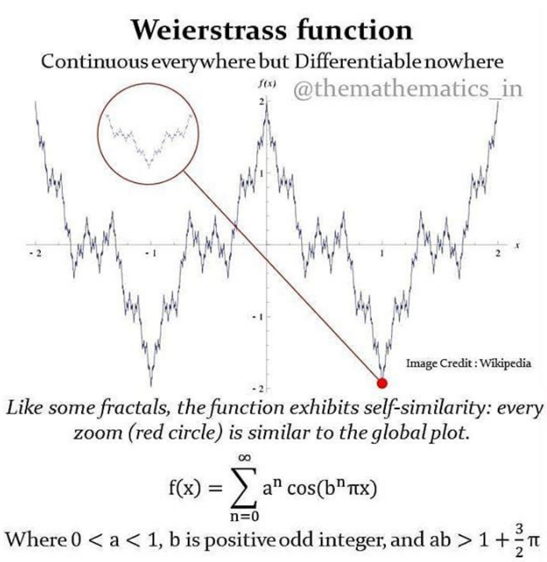
$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f *est continue en* 0 *uniquement.*

2. *Soit* f *une fonction continue en un point* $x_0 \in \mathrm{D}(f)$*. Montrer que la fonction* $|f|$ *est continue au point* x_0*. La réciproque est-elle correcte ?*

Exercice 8 – Fonction uniformément continue

1. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *est uniformément continue sur* $]0, +\infty[$.
2. *Montrer que la fonction* $f(x) = x^2$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.



(Futur exercice 1 du Midterm 2)

On admet le résultat suivant : Pour tout $x, y, p, q \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} .$$

Exercice 9 – p-Normes, $p \geq 1$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ des éléments de $\mathbb{R}^+$.

1. *Supposons que $\sum_{i=1}^n \alpha_i^p = \sum_{i=1}^n \beta_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1$.*
2. *Montrer que*
$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$
3. *Montrer que*
$$\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n \beta_i^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

En déduire que l'application

$$\mathbb{R}^n \ni x \to \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}_+$$

est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 10

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty .$$

Exercice 11

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On définit l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ par

$$\|(x, y)\| = \sqrt{a^2 x_2 + b^2 y^2} , \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big) .$$

1. *Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Dessiner la boule de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 correspondant à la norme précédente.*