

MAT 2525 - DGD 3 - Les séries numériques

Allan Merino

Exercice 1

Montrer que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}},$$

sont divergentes.

Exercice 2

Etudier la convergence ou divergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+4}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{3^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, (a > 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n+7}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^n}{n^{n^2}}.$$

Exercice 3

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ converge et calculer sa somme (on assumera pour ce calcul que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$).

Exercice 4 – Critère du quotient

Soient $\{a_n\}_n$ et $\{b_n\}_n$ deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = L$. Montrer que

1. Si $L \neq 0$ ou $+\infty$, alors les séries $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ sont de même nature.
2. Si $L = 0$ et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge absolument, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument. De même, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ diverge.
3. Si $L = +\infty$ et si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ diverge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge. De même, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge.

Exercice 5

Etudier la convergence ou divergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5n^2}{n! + 8n}.$$

Exercice 6 – Produit de Cauchy

Soient $\{a_n\}_n$ et $\{b_n\}_n$ deux suites réelles. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$) converge absolument (resp. converge). Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7

Donner un exemple de suite $\{x_n\}$ tel que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et tel que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ diverge.

Exercice 8

Calculer la valeur des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3 + n^2 - 2n}.$$

Exercice 9

1. Soit k un entier tel que $k \geq 2$. Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k-1}$.
2. Montrer la série $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \right)$ converge.

Exercice 10

Soit $\{x_n\}_n$ une suite de nombres réels (strictement) positifs tel que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ diverge. La réciproque est-elle correcte ?

Exercice 11

Soit $\{x_n\}_n$ une suite de nombres réels positifs telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ converge.

Exercice 12 – Critère d'Abel

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ diverge. Est-ce que cela contredit le critère d'Abel ?

Exercice 13 – Critère de Raabe

1. Soit $\{x_n\}_n$ une suite réelle telle que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ est convergente. Que peut-on dire si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$? Et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1$?
2. Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Exercice 14 – Théorème de Riemann

Soit $\{x_n\}$ une suite réelle telle que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge mais ne converge pas absolument.

1. Montrer qu'il existe un réarrangement f tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ diverge.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un réarrangement f tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ converge et tel que $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$.

Exercice 15 – Formules de Ramanujan pour π

Montrer en moins de cinq secondes que les formules obtenues pour π par le mathémagicien Ramanujan sont correctes :

A few formulae (out of the many possible ones)



$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4} (n!)^6} \pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1} (n!)^4 (441)^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

By denoting $(x)_n$ the value : $\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\dots(x+n-1)$ (it's Pochhammer's symbol), we get :

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3} \right)^{-1} \quad \pi = 32 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42\sqrt{5}n + 5\sqrt{5} + 30n - 1) \left(\frac{1}{2}\right)_n^3 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}}{64^n (n!)^3} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{27}{4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(15n+2) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{2}{27}\right)^n}{(n!)^3} \right)^{-1} \quad \pi = \frac{15\sqrt{3}}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(33n+4) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{4}{125}\right)^n}{(n!)^3} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(11n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n \left(\frac{4}{125}\right)^n}{(n!)^3} \right)^{-1} \quad \pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(133n+8) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n \left(\frac{4}{85}\right)^n}{(n!)^3} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (28n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{2n+1}} \right)^{-1} \quad \pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (20n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (644n+41) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}} \right)^{-1} \quad \pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (260n+23) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 18^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}} \right)^{-1} \quad \pi = 2\sqrt{3} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+1) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^n} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{3\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(40n+3) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 49^{2n+1}} \right)^{-1} \quad \pi = \frac{2}{\sqrt{11}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(280n+19) \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 99^{2n+1}} \right)^{-1}$$

Si il vous a fallu 10 secondes pour y répondre, n'ayez pas peur de l'admettre !