# MAT 2525 - DGD 2 - Les suites numériques

**Allan Merino**

## Exercice 1

*Démontrer, en utilisant la définition de la convergence d'une suite vue en cours, que :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+7} = 0\,,$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0\,,$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1\,,$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}\,.$

## Exercice 2

*Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par $x_{n+1} = \frac{1}{6}(2x_n + 3)$ et $x_0 = 1$.*

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n > \frac{3}{4}$.*
2. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est décroissante.*
3. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

## Exercice 3

*Soit $\{x_n\}_n$ une suite définie par*

$$x_0 = 0\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq x_n < 3$.*
2. *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.*
3. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

## Exercice 4

*Soit $\{x_n\}_n$ une suite définie par*

$$x_0 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

*Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

## Exercice 5

*Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n} k!$.*

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{n+1}$.*
2. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq u_n < 2$.*
3. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

### Exercice 6 – Produit de suites de Cauchy

*Soient* $\{x_n\}_n$ *et* $\{y_n\}_n$ *deux suites de Cauchy. Soit* $\{z_n\}_n$ *la suite définie pour tout* $n$ *par* $z_n = x_n y_n$. *Montrer que la suite* $\{z_n\}_n$ *est de Cauchy.*

### Exercice 7 – Suites de Cauchy

*Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite définie par*

$$x_0 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{2^n}}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

*Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *est convergente.*

### Exercice 8

1. *Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite. Supposons qu'il existe* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in ]0,1[$ *tel que*

   $$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha\beta^n\,, \qquad (n \geq 1)\,.$$

   *Montrer que* $\{x_n\}_n$ *est une suite de Cauchy.*
2. *Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$. *Est-ce une suite de Cauchy ?*

### Exercice 9

*Soit* $\{x_n\}_n$ *la suite définie, pour* $n \geq 1$, *par* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. *Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *n'est pas une suite de Cauchy.*

### Exercice 10

*Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite satisfaisant*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N})\,,(\forall n > \mathrm{N})\,, |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon\,.$$

*Est-ce que la suite* $\{x_n\}_n$ *est de Cauchy ?*

### Exercice 11

*Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite telle que* $x_n \in \mathbb{N}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *est convergente si et seulement si il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n = x_m$ *pour tout* $n, m > \mathrm{N}$.

### Exercice 12

*Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite réelle et soient* $\{y_n\}_n$ *et* $\{z_n\}_n$ *les suites extraites de* $\{x_n\}_n$ *définies par* $y_n = x_{2n}, z_n = x_{2n+1}, n \in \mathbb{N}$.

1. *Supposons que les suites* $\{y_n\}_n$ *et* $\{z_n\}_n$ *convergent. Est-ce que la suite* $\{x_n\}_n$ *converge ?*
2. *Supposons que les suites* $\{y_n\}_n$ *et* $\{z_n\}_n$ *convergent et* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. *Est-ce que la suite* $\{x_n\}_n$ *converge ?*

**Exercice 13**

*Déterminer la limite supérieure et inférieure des suites suivantes :*

1. $x_n = (-1)^n n \, , n \in \mathbb{N} \, ,$
2. $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \, , n \in \mathbb{N} \, ,$
3. $x_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \, , n \in \mathbb{N} \, ,$
4. $x_n = 1 + (-1)^n \, , n \in \mathbb{N} \, .$
5. $x_n = \begin{cases} \pi + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \, .$