MAT 2525 - Correction de l'examen intermédiaire 2

Exercice 1

1. Soit E un ensemble fini. Notons $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Montrons que $\mathrm{Int}(E) = \mathrm{Acc}(E) = \emptyset$.
   Commençons par Int(E). Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $\delta > 0$, on voit que l'ensemble $]x-\delta, x+\delta[$ contient une infinité d'éléments ; si on veut s'en convaincre, on voit que
   $$\left\{x \pm \frac{\delta}{n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}\right\} \subseteq B(x, \delta).$$
   En particulier, $B(x, \delta)$ ne peut pas être inclus dans E car E est fini, i.e. $x \notin \mathrm{Int}(E)$. Finalement $\mathrm{Int}(E) = \emptyset$.
   Regardons à présent Acc(E). Pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note $\delta_i = \frac{\min(x_{i+1}-x_i, x_i - x_{i-1})}{2}$ (par convention, on a $\delta_1 = \frac{\min(x_2-x_1)}{2}$ et $\delta_n = \frac{\min(x_n - x_{n-1})}{2}$). On voit alors que $B'(x_i, \delta_i) \cap E = \emptyset$, i.e. $x_i \notin \mathrm{Acc}(E)$. De la même manière, soit $x \in \mathbb{R} \setminus E$ et soit $\delta = \frac{1}{2}\min\{|x - x_i|, i = 1, \ldots, n\}$. On voit que $B(x, \delta) \cap E = \emptyset$ et donc $x \notin \mathrm{Acc}(E)$ et finalement, on obtient que $\mathrm{Acc}(E) = \emptyset$.
2. Soit $E_1 = \{x \in \mathbb{Q}, 1 \leq x \leq 2\} \cup \{\pi\} = [1, 2] \cap \mathbb{Q} \cup \{\pi\}$. On a $\mathrm{Acc}(E_1) = [1, 2]$. Montrons cela. Soit $x \in]1, 2[$. Il existe $\delta(x) > 0$ tel que $B'(x, \delta(x)) \subseteq]1, 2[$. Soit $\delta_1 \leq \delta(x)$. En utilisant le théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $z(x) \in \mathbb{Q}$ tel que $z(x) \in]x, x + \delta_1[$. Ainsi $B'(x, \delta_1) \cap E_1 \neq \emptyset$, i.e. $x \in \mathrm{Acc}(E_1)$, et donc $]1, 2[\subseteq \mathrm{Acc}(E_1)$. De la même manière, on montre que $\{1, 2\} \in \mathrm{Acc}(E_1)$. Si $x < 1$, on a $B'(x, \frac{1-x}{2}) \cap E_1 = \emptyset$. De même, si $x > 2$, $x \neq \pi$, on voit que $B'\left(x, \frac{\min(d(\pi,x), d(x,2))}{2}\right) \cap E_1 = \emptyset$. Finalement, $B'(\pi, 1) \cap E_1 = \emptyset$, et donc
   $$\mathrm{Acc}(E_1) = [1, 2].$$
   Ainsi, $\mathrm{Acc}(E_1)$ n'est pas contenu dans E_1 et donc E_1 n'est pas fermé. Puisque tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il est fermé et borné, on obtient que E_1 n'est pas compact.
3. On montre que $\mathrm{Acc}\left(E = \left\{(-1)^n \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \{-1, 1\}$. Notons $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord, on voit que $E \subseteq [-2, -1] \cup [1, 2]$. De plus, si on considère les applications $\phi_1 : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ et $\phi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par
   $$\phi_1(n) = 2n, \qquad \phi_2(n) = 2n + 1,$$
   on voit que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\phi_1(n)} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{\phi_2(n)} = -1$. Ainsi, $\{-1, 1\} \subseteq \mathrm{Acc}(E)$. Puisque $E \subseteq [-2, -1] \cup [1, 2]$, on voit facilement que tout point de $\mathbb{R} \setminus E$ n'est pas un point d'accumulation de E. Maintenant supposons que $x \in]-1, 2]$. Il existe alors $n \in 2\mathbb{N}^*$ tel que $1 + \frac{1}{n+1} < x \leq 1 + \frac{1}{n}$. Si $x \neq 1 + \frac{1}{n}$, alors pour $\delta = \frac{\min\left(d(x, 1+\frac{1}{n}), d(x, 1+\frac{1}{n+2})\right)}{2}$, on a $B(x, \delta) \cap E = \emptyset$. Sinon $1 + \frac{1}{n+2} < x < 1 + \frac{1}{n-2}$ et on applique la même méthode (on suppose dans ce cas que $n \neq 2$, le cas $n = 2$ se traite de manière similaire). Ainsi $x \notin \mathrm{Acc}(E)$. La même méthode montre que $[-2, -1[\cap \mathrm{Acc}(E) = \emptyset$, et donc on obtient bien que $\mathrm{Acc}(E) = \{-1, 1\}$.
4. Oui ! $\mathbb{R}$ est ouvert et fermé car $\mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathrm{Acc}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Posons $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ et $y_n = (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$.

— <u>Nature de $\sum_{n\geq 1} x_n$</u>. On voit que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} < 1\,,$$

et en particulier, en utilisant le critère de Cauchy, on obtient que la série $\sum_{n\geq 1} x_n$ converge.

— <u>Nature de $\sum_{n\geq 1} y_n$</u>. Notons $y_n = (-1)^n z_n$ avec $z_n = \frac{n+1}{n^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+2}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^3+2n^2}{n^3+2n^2+\underbrace{(n^2+3n+1)}_{>0}} < 1\,,$$

i.e. $z_{n+1} < z_n$. Ainsi, la suite $\{z_n\}_n$ est décroissante. De plus, $\lim_{n\to+\infty} z_n = 0$ et donc, en utilisant le critère d'Abel, on obtient que la série $\sum_{n\geq 1} y_n$ converge.

2. Posons $u_n = \frac{n}{\alpha^n}$, $n \geq 1$. On utilise le critère de d'Alembert. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\alpha^{n+1}}\cdot\frac{\alpha^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{\alpha}\,,$$

Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on obtient que la série converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$. De plus, on voit que si $\alpha = 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ est divergente.

Fixons à present $\alpha > 1$. Notons $\mathrm{X} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\alpha^n}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{X} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{\alpha^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\alpha^n} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} - 1\right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{m}{\alpha^{m+1}} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} - 1\right) = \frac{1}{\alpha}\mathrm{X} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} - 1\right)
\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{X} - \frac{1}{\alpha}\mathrm{X} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n}$. Puisque $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-1}$, on obtient donc

$$\mathrm{X}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right) = -1 + \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{X} = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\,.$$

Exercice 3

1. (a) Prenons $\mathscr{A}_1 = [1\,,3[\,, \mathscr{A}_2 = \left]\frac{1}{2}\,,2\right]$ et $\mathscr{A}_3 = \left]\frac{3}{4}\,,2\right]$. On a alors

$$\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \cap \mathscr{A}_3 = [1\,,2]\,.$$

De la même manière, on peut prendre $\mathscr{B}_1 =]1\,,3]\,, \mathscr{B}_2 = \left[\frac{1}{2}\,,2\right[$ et $\mathscr{B}_3 = \left[\frac{3}{4}\,,2\right[$ et on a

$$\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 \cap \mathscr{B}_3 =]1\,,2[\,.$$

(b) Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge. En particulier, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. En particulier, on a $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1}{x_n}\right| = 0$. Ainsi la suite $\{\frac{1}{x_n}\}_n$ ne tend pas vers 0 et donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_n}$ diverge.

La réciproque n'est pas vraie. En effet, si l'on prend $x_n = n$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge mais la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n$ est aussi divergente.

Exercice 4

1. Pour tout $x \neq 1$, on a

$$\Psi(x) = \frac{(x-1)^2(x+\pi)}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)^2(x+\pi)}{(x-1)^2} = x+\pi\,.$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathrm{B}'(x_0, |x_0-1|)$, on a

$$|\Psi(x) - \Psi(x_0)| = |x+\pi-(x_0+\pi)| = |x-x_0|\ .$$

Posons $\delta = \min(|x_0-1|\ ,\varepsilon)$. Ainsi pour tout $x \in \mathrm{B}'(x_0,\delta)$, on a

$$|\Psi(x) - \Psi(x_0)| = |x-x_0| < \varepsilon\,,$$

et donc f est continue en x_0. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. Montrons que $\lim_{x\to1}\Psi(x) = 1+\pi$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathrm{B}'(1,\varepsilon)$ (i.e. $|x-1| < \varepsilon$), on a

$$|\Psi(x) - (1+\pi)| = |x+\pi-(1+\pi)| = |x-1| < \varepsilon$$

et donc f admet une limite en $1 \in \mathrm{Acc}(\mathbb{R}\setminus\{1\})$ et on a $\lim_{x\to1}\Psi(x) = 1+\pi$.

Bonus 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note par P_n la partition de $[-1,1]$ donnée par

$$\mathrm{P}_n = \left\{\frac{i-n}{n}, i = 0,\ldots,2n\right\}\,.$$

On voit facilement que $|\mathrm{P}_n| = \frac{1}{n}$. Pour tout $i = 1,\ldots,2n$, on a

$$\mathrm{m}_i(f_2,\mathrm{P}_n) = \frac{a(i-1-n)}{n}\,,\qquad \mathrm{M}_i(f_2,\mathrm{P}_n) = \frac{i-1-n}{n}\,,$$

et en particulier, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{s}(f_2, \mathrm{P}_n) &= \sum_{i=1}^{2n} \mathrm{m}_i(f_2, \mathrm{P}_n)(x_i - x_{i-1}) = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i-1-n}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{2n} (i-1-n) \\
&= \frac{1}{n^2} \left(\left(\sum_{i=1}^{2n} i \right) - 2n - 2n^2 \right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - 2n - 2n^2 \right) \\
&= -\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{S}(f_2, \mathrm{P}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} \frac{i-n}{n} = \frac{1}{n}.$$

On voit facilement que $\mathrm{S}(f_2, \mathrm{P}_n) - \mathrm{s}(f_2, \mathrm{P}_n) = \frac{2}{n}$. A présent, fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $n > \mathrm{E}\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) + 1$, on a $\frac{2}{n} < \varepsilon$, i.e.

$$\mathrm{S}(f_2, \mathrm{P}_n) - \mathrm{s}(f_2, \mathrm{P}_n) < \varepsilon.$$

En utilisant un résultat vu en cours, on obtient que la fonction f_2 est intégrable. Puisque

$$0 = \sup \{\mathrm{s}(f, \mathrm{P}_n), n \in \mathbb{N}^*\} \leq \mathrm{s}(f) \leq \mathrm{S}(f) \leq \inf \{\mathrm{S}(f, \mathrm{P}_n), n \in \mathbb{N}^*\} = 0,$$

on obtient que

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = 0.$$

Bonus 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

— $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Il existe $j \in [|1, n|]$ tel que $\|x\|_\infty = |x_j|$. On a $\|x\|_\infty = |x_j| = \sqrt{|x_j|^2}$. En utilisant que $|x_j|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2$, on obtient

$$\|x\|_\infty = |x_j| = \sqrt{|x_j|^2} \leq \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2} = \|x\|_2$$

et donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.

— $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. On a

$$\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 \leq |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |x_i| \cdot |x_j| \\
&= (|x_1| + \dots |x_n|)^2 = \|x\|_1^2,
\end{aligned}$$

i.e. $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$. Puisque $\|x\|_1 \geq 0$, $\|x\|_2 \geq 0$, on obtient que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$.

— $\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n| \leq \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| + \dots + \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = n \sup_{i=1,\dots,n} |x_i| = n \|x\|_\infty$$