MAT 2525 - Correction de l'examen intermédiaire 1

Exercice 1

1. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par
$$\mathrm{E} = \left\{ \frac{1}{2n} + \frac{1}{3m}, n, m \in \mathbb{N}^* \right\} .$$
Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a
$$0 < \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2}, \qquad 0 < \frac{1}{3m} \leq \frac{1}{3}.$$
Ainsi, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < \frac{1}{2n} + \frac{1}{3m} \leq \frac{5}{6}$. Notons tout d'abord que $\frac{5}{6} = \frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 1}$, i.e. $\frac{5}{6} \in \mathrm{E}$. En particulier, $\sup(\mathrm{E}) = \frac{5}{6}$.
A présent, on a $0 < e$ pour tout $e \in \mathrm{E}$. Ainsi, 0 est un minorant de E. Montrons que $\inf(\mathrm{E}) = 0$. Pour cela, montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, ε n'est pas un minorant de E. Fixons $\varepsilon > 0$. En prenant $n = m, n \geq 1$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{5}{6n} \in \mathrm{E}$. De plus, pour tout $n > \mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\frac{5}{6\varepsilon}\right) + 1$, on a $0 < \frac{5}{6n} < \varepsilon$, et donc ε n'est pas un minorant de E. Finalement, $\inf(\mathrm{E}) = 0$.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{4} + \frac{8\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{(n+8)\pi}{4}\right) = x_{n+8} .$$
(b) On voit facilement que $x_0 = 1$ et $x_4 = -1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{8n} = 1$ et $x_{8n+4} = -1$. Soient $\{v_n\}_n$ et $\{w_n\}_n$ les suites définies par
$$v_n = \inf\{x_m , m \geq n\} , \qquad w_n = \sup\{x_m , m \geq n\} .$$
Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\{1\} = \{x_{8m} , 8m \geq n\} \subseteq \{x_m , m \geq n\} , \qquad \{-1\} = \{x_{4+8m} , 4 + 8m \geq n\} \subseteq \{x_m , m \geq n\} .$$
Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq x_k \leq 1$, on obtient que $-1 \leq v_k, w_k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$1 = \sup\{x_{8m} , 8m \geq n\} \leq \sup\{x_m , m \geq n\} \leq 1 ,$$
$$-1 = \inf\{x_{4+8m} , 4 + 8m \geq n\} \geq \inf\{x_m , m \geq n\} \geq -1 ,$$
i.e. $v_n = -1$ et $w_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement, on a
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -1 , \qquad \limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = 1 .$$

Exercice 2

1. On cherche les éléments $x \in \mathbb{R}$ tels que $\left|x^2 + 4x + 2\right| = 1$, On a
$$\left|x^2 + 4x + 2\right| = 1 \quad \text{ssi} \qquad x^2 + 4x + 2 = 1 \quad \text{ou} \qquad x^2 + 4x + 2 = -1 .$$
i.e. $x^2 + 4x + 1 = 0$ ou $x^2 + 4x + 3 = 0$. Notons P_1 et P_2 les polynômes $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 1$ et $\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + 4\mathrm{X} + 3$. On voit facilement que
$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = \left(\mathrm{X} + (2 + \sqrt{3})\right)\left(\mathrm{X} + (2 - \sqrt{3})\right) , \qquad \mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} + 3)(\mathrm{X} + 1) ,$$
et ainsi
$$\left\{x \in \mathbb{R} , \left|x^2 + 4x + 2\right| = 1\right\} = \left\{-2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, -3, -1\right\} .$$

2. Les racines du polynôme P_2 sont -3 et -1. De plus, on sait que

$$\begin{cases} P_2(X) > 0 & \text{si } X \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[\\ P_2(X) = 0 & \text{si } X \in \{-3, -1\} \\ P_2(X) < 0 & \text{si } X \in]-3, -1[\end{cases}$$

et donc

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}\,, x^2 + 4x + 3 < 0\right\} =]-3, -1[\,.$$

En particulier, $\inf(E) = -3$ et $\sup(E) = -1$.

Exercice 3

1. Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \in 3\mathbb{N} \\ \pi & \text{si } n \in 3\mathbb{N}+1 \\ \sqrt{19} & \text{si } n \in 3\mathbb{N}+2 \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq x_n \leq \sqrt{19}$, i.e. $\{x_n\}_n$ est bornée. Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par

$$\phi_1(n) = 3n\,, \qquad \phi_2(n) = 3n+1\,, \qquad \phi_3(n) = 3n+2\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_{\phi_1(n)} = 0$, $x_{\phi_2(n)} = \pi$ et $x_{\phi_3(n)} = \sqrt{19}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_{\phi_1(n)} = 0\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} x_{\phi_2(n)} = \pi\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} x_{\phi_3(n)} = \sqrt{19}\,.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n}}\,.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sqrt{n+\frac{1}{n}} + \sqrt{n} \geq 1$. Ainsi

$$\left|\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right| = \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} < \frac{1}{n}\,, \qquad (n \in \mathbb{N}^*)\,.$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > N$, on a

$$|x_n - 0| = \left|\sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon\,,$$

i.e. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+\frac{1}{n}} - \sqrt{n} = 0\,.$

3. Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{E(k\sqrt{2})}{n^2}\,.$$

Comme expliqué dans le devoir maison, on a $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x_n \in \mathbb{Q}$ mais $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

4. Prenons $x_n = y_n = \frac{(-1)^n}{n}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère d'Abel mais ne converge pas absolument d'après le critère de Riemann. De plus $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge absolument d'après Riemann.

Exercice 4

Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par

$$x_0 = 0\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

1. On raisonne par récurrence. On a $x_0 = 0 \in [0,2[$. Supposons que $x_n \in [0,2[$. Ainsi, $x_n+1 \in [1,3[$ et donc $\sqrt{x_n+1} \in [1,\sqrt{3}[\subseteq [0,2[$, i.e. $x_{n+1} \in [0,2[$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le x_n < 2$.
2. Montrons cela par récurrence. On a $0 = x_0 < x_1 = 1$. Supposons que $x_n < x_{n+1}$. Alors $x_n + 1 < x_{n+1} + 1$ et donc $\sqrt{x_n+1} < \sqrt{x_{n+1}+1}$, i.e. $x_{n+1} < x_{n+2}$. Ainsi, la suite $\{x_n\}_n$ est croissante.
3. La suite $\{x_n\}_n$ est croissante et majorée (par 2). Ainsi, elle converge. Notons x sa limite. En utilisant que $x_n \to x$ et $x_{n+1} \to x$, on obtient que x est solution de
$$x = \sqrt{x+1}\,.$$
Ainsi, $x^2 - x - 1 = 0$. Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}^2 - \mathrm{Y} - 1$ a deux racines :
$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \qquad \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,.$$
Puisque $x_n \in [0,2[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \in [0,2]$. Or, $\Phi_2 < 0$ et donc $x = \Phi_1$.

Exercice 5

1. Notons $x_n^1 = na^n$, $x_n^2 = \frac{a^n}{n^2}$ et $x_n^3 = \frac{a^{n^2}}{n^n}$. Commençons par la série de terme générale x_n^1. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^1}{x_n^1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \lim_{n\to+\infty} a\frac{n+1}{n} = a\,.$$
En particulier, en utilisant le Critère de d'Alembert, on obtient que si $a < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^1$ converge et si $a > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^1$ diverge. Si $a = 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge.
Regardons à présent la série de terme générale x_n^2. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^2}{x_n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{a^n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} a\frac{n^2}{(n+1)^2} = a\,.$$
De nouveau, en utilisant le Critère de d'Alembert, on obtient que si $a < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ converge et si $a > 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ diverge. Si $a = 1$, on obtient que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann.
Finalement, on étudie la série de terme générale x_n^3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \left|x_n^3\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < a \le 1 \end{cases}$$

En utilisant le critère de Cauchy, on obtient que si $a \leq 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^3$ converge et si $a > 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^3$ diverge.

2. On voit facilement que

$$\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Premièrement, puisque $(n+1)(n+2) > n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 < \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^2}, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Ainsi, d'après le Théorème de comparaison, on obtient que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge.

Calculons à présent sa somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Notons par $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}
S_m &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+2} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n+2} \qquad (n = k+1) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k+2}\right) - \left(\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{m+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \lim_{m \to +\infty} S_m = \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right) = \frac{1}{2}.$$