MAT 2525 - Correction Devoir Maison 2

Exercice 1

1. Soit $0 < a < 1$. Notons $x_n = na^{n-1}$, $n \geq 1$.

   (a) Pour montrer la convergence de la série, on peut utiliser le critère de d'Alembert. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = a\frac{n+1}{n} ,$$
   et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$. En particulier, la série $\sum\limits_{n\geq 1} na^{n-1}$ est convergente.

   (b) Notons $\mathrm{X} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na^{n-1}$. On a
   $$\begin{aligned} \mathrm{X} &= \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1+1)a^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} ma^m + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = a\sum_{m=1}^{+\infty} ma^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \\ &= a\mathrm{X} + \frac{1}{1-a} , \end{aligned}$$
   i.e. $\mathrm{X}(1-a) = \frac{1}{1-a}$. Ainsi, on a
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2} .$$

2. On voit facilement que pour tout $n \geq 2$, on a $(2n-1)(2n+1) = 4n^2-1 \geq 2n^2$, i.e. $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$. Ainsi, en utilisant le Théorème de comparaison et le critère de Riemann, on obtient que la série
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
   est convergente. Calculons à présent sa valeur. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} , \qquad (n \in \mathbb{N}^*) .$$
   En multipliant par $2n-1$ et en prenant $n = \frac{1}{2}$, on obtient que $a = \frac{1}{2}$. De la même manière, on obtient que $b = -\frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :
   $$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2m+1)} , \end{aligned}$$
   et donc
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2m+1)} = \frac{1}{2} .$$

3. Soient $\{x_n^1\}_n$, $\{x_n^2\}_n$ et $\{x_n^3\}_n$ les suites définies par

$$x_n^1 = \frac{n^{n+a}}{n!}\,, \qquad x_n^2 = \left(1-\frac{a}{n}\right)^n\,, \qquad x_n^3 = \frac{n^4 - an^3 + a^2n^2 - a^3n + a^4}{n^4 + 2an^3 + 4an^2 + 8an + 16}\,, \qquad (n \in \mathbb{N}^*)\,.$$

— <u>Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^1$</u>. On va utiliser le Critère de d'Alembert. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x_{n+1}^1}{x_n^1} = \frac{(n+1)^{n+1+a}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n+a}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+a} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

On sait que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^a = 1\,,$$

et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^1}{x_n^1} = e^1 > 1$. Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on obtient que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^{n+a}}{n!}$ est divergente.

— <u>Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$</u>. On a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}\,.$$

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $e^{-a} \neq 0$. Comme vu en cours, puisque $\lim_{n\to+\infty} x_n^2 \neq 0$, on obtient que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est divergente.

— <u>Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^3$</u>. L'idée est la même que pour la question précédente. On a

$$\lim_{n\to+\infty} x_n^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 - an^3 + a^2n^2 - a^3n + a^4}{n^4 + 2an^3 + 4an^2 + 8an + 16}$$

et donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^3$ est divergente.

Exercice 2

1. (a) Montrons que

$$\mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1) =]-\infty\,,0] \cup \{1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\}\,.$$

— <u>$]-\infty\,,0] \subseteq \mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1)$</u>. Commençons par $x \in]-\infty\,,0[$ et soit $\delta = \frac{|x|}{2}$. On voit facilement que $\mathrm{B}(x,\delta) \subseteq]-\infty,0[$. Ainsi, $x \in \mathrm{Int}(]-\infty,0[) \subseteq \mathrm{Acc}(]-\infty,0[)$ et donc $]-\infty,0[\subseteq \mathrm{Acc}(]-\infty,0[)$. De même, pour tout $\delta > 0$, on a $\emptyset \neq]-\delta,0[= \mathrm{B}'(0,\delta) \cap]-\infty,0[\subseteq \mathrm{B}'(0,\delta) \cap \mathrm{E}_1$, i.e. $0 \in \mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1)$ et donc $]-\infty,0] \subseteq \mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1)$.

— <u>$\mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1) \cap]8\,,+\infty[= \emptyset$</u>. On voit facilement que $\bigcup_{i=0}^{7} \left\{i+\frac{1}{n}\,,n \in \mathbb{N}^*\right\} \subseteq [0\,,8]$. Soit $x > 8$ et soit $\delta = \frac{x-8}{2}$. On a alors $\mathrm{B}(x,\delta) \cap \mathrm{E}_1 = \emptyset$, et donc $x \notin \mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1)$.

— <u>$\mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1) \cap [0\,,8] = \{0\,,\ldots\,,8\}$</u>. Pour tout $i = 0\,,\ldots\,,7$, on note $\mathrm{F}_i = \left\{i+\frac{1}{n}\,,n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On voit facilement que $\mathrm{F}_i \subseteq]i\,,i+1[$. Soit $x \in [0\,,8]$. On va distinguer deux cas :

   i. <u>$x = i$</u>. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\mathrm{N}(\varepsilon)} < \varepsilon$. En particulier, on a $i + \frac{1}{\mathrm{N}(\varepsilon)} \in \mathrm{F}_i \cap \mathrm{B}'(i\,,\varepsilon)$ et donc $i \in \mathrm{Acc}(\mathrm{E}_1)$.

ii. $x \in]i, i+1[$. Il existe $\delta_i(x)$ tel que $B'(x, \delta_i(x)) \subseteq]i, i+1[$. De plus, on a $x - i \in]0, 1[$. Ainsi $\frac{1}{x-i} \in]1, +\infty[$ et il existe $N(i, x)$ tel que $N(i, x) \leq \frac{1}{x-i} < N(i, x) + 1$, i.e. $i + \frac{1}{N(i,x)+1} < x \leq i + \frac{1}{N(i,x)}$. On distingue deux cas.

A. Si $x \neq i + \frac{1}{N(i,x)}$. Posons $\delta = \frac{\min\left(\left|i+\frac{1}{N(i,x)}-x\right|, \left|x-i-\frac{1}{N(i,x)+1}\right|\right)}{2}$. On voit alors que $B'(i, \delta) \cap F_i = \emptyset$, et donc $x \notin \mathrm{Acc}(E_1)$.

B. Si $x = i + \frac{1}{N(i,x)}$. Alors on a $i + \frac{1}{N(i,x)+1} < x < i + \frac{1}{N(i,x)-1}$ (notons que puisque $x \neq i+1$, on a $N(i, x) \geq 2$ et donc $N(i, x)-1 \geq 1$). Posons $\delta = \frac{\min\left(\left|i+\frac{1}{N(i,x)-1}-x\right|, \left|x-i-\frac{1}{N(i,x)+1}\right|\right)}{2}$. Alors $B'(x, \delta) \subseteq]i, i+1[$ and $B'(x, \delta) \cap F_i = \emptyset$, i.e. $x \notin \mathrm{Acc}(E_1)$.

Finalement, on obtient que

$$\mathrm{Acc}(E_1) =]-\infty, 0] \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} .$$

(b) Soit $E_2 = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$. On voit facilement que le seul point d'accumulation est 0. Tout d'abord, on a $E_2 \subseteq [0, 1]$. En particulier, tout point de $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ n'est pas un point d'accumulation de E_2. Comme dans l'exemple précédent, pour tout $x \in]0, 1]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-(n+1)} < x \leq e^{-n}$ et on voit donc facilement que $x \notin \mathrm{Acc}(E_2)$. Finalement, en utilisant que $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, on a $0 \in \mathrm{Acc}(E_2)$. On peut le montrer directement en utilisant ε, δ. En effet, soit $\varepsilon > 0$ (on peut supposer que $\varepsilon \leq 1$, sinon $e^{-n} < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour tout $n \geq N = E(-\ln(\varepsilon)) + 1$, on a $e^{-n} < \varepsilon$, i.e. $B'(0, \varepsilon) \cap E_2 \neq \emptyset$.

2. Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ tels que $\mathrm{Acc}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{A}$ et $\mathrm{Acc}(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{B}$.

(a) Montrons que $\mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$. Soit $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$. Soit $\delta > 0$. Par définition, on a $B'(x, \delta) \cap (\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, on va supposer que $B'(x, \delta) \cap \mathscr{A} \neq \emptyset$. Notons que cela implique que $B'(x, \delta_1) \cap \mathscr{A} \neq \emptyset$ pour tout $\delta_1 > \delta$. On distingue alors deux cas :

— Si pour tout $\delta_2 < \delta$, on a $B'(x, \delta_2) \cap \mathscr{A} \neq \emptyset$ alors $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{A}) \subseteq \mathrm{Acc}(\mathscr{A}) \cup \mathscr{B} \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

— Sinon, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $B'(x, \delta_2) \cap \mathscr{A} = \emptyset$. Puisque $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B})$, on obtient que que pour tout $\delta_3 < \delta_2$, $B'(x, \delta_3) \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$ et donc pour tout $\delta_4 > 0$, on a $B'(x, \delta_4) \cap \mathscr{B} \neq \emptyset$, i.e. $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{B})$. Ainsi $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

Ainsi, $x \in \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, i.e. $\mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cup \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, et donc $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ est fermé.

(b) Montrons que $\mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$. Soit $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cap \mathscr{B})$. Pour tout $\delta > 0$, on a $B'(x, \delta) \cap (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $\delta > 0$, on a $\emptyset \neq B'(x, \delta) \cap (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \subseteq B'(x, \delta) \cap \mathscr{A}$ et $\emptyset \neq B'(x, \delta) \cap (\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \subseteq B'(x, \delta) \cap \mathscr{B}$, i.e. $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{A})$ et $x \in \mathrm{Acc}(\mathscr{B})$. Ainsi on a $\mathrm{Acc}(\mathscr{A} \cap \mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ et donc $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ est fermé.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Ainsi, $0 \in \bigcap\limits_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. A présent, soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $N = E\left(\frac{1}{|x|}\right) + 1$, on a $N > \frac{1}{|x|}$, et donc $\frac{1}{N} < |x|$, i.e. $x \notin \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[$. Ainsi, $x \notin \bigcap\limits_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ et donc

$$\bigcap_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} .$$

Exercice 3

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{B}(x_0, \delta)$, on a $-\frac{x_0}{2} < x - x_0 < \frac{x_0}{2}$, i.e. $0 < \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$. De plus, pour tout $x \in \mathrm{B}(x_0, \delta)$, on a
$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| < \frac{2\,|x_0 - x|}{|x_0|^2} < \frac{2\delta}{|x_0|^2} < \varepsilon\,,$$
et donc f est continue en x_0. Le cas $x_0 < 0$ est similaire (notons que la fonction f est impaire).
2. Montrons que f n'a pas de limite en 0. Comme vu en cours, la propriété "f n'admet pas de limite en 0" s'écrit comme
$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}^*\,, |x| < \delta \rightarrow |f(x) - \alpha| > \varepsilon\,.$$
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = |\alpha|$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $n \geq 3$ tel que $\frac{1}{n|\alpha|} < \delta$. Ainsi, on a
$$\left|f\left(\frac{1}{n\,|\alpha|}\right) - \alpha\right| = |n\,|\alpha| - \alpha| \geq n\,|\alpha| - |\alpha| = (n-1)\,|\alpha| > \varepsilon\,,$$
et donc f n'a pas de limite en 0. Ainsi, on ne peut pas trouver d'éléments $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction g soit continue sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a
$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2}\right| = \frac{(1+y^2) - (1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(x-y)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)} = |x-y| \cdot \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$
   - Si $x, y \geq 1$, on a $x^2 + y^2 \geq x + y$. En particulier, $(1+x^2)(1+y^2) = 1 + x^2y^2 + x^2 + y^2 > x^2 + y^2 > x + y$, et donc $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} < 1$.
   - Supposons que $x, y \in \,]0,1]$. En utilisant que $(1+x^2)(1+y^2) \geq 1$, on obtient que $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq x + y \leq 2$.
   - Supposons a présent que $x \in \,]0\,,1]$ et $y > 1$. Alors $(1+x^2)(1+y^2) > 1 + y^2$ et $x + y \leq 1 + y < 1 + y^2$ et donc $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} < 1$.

   Ainsi, pour tout $x, y \in \,]0\,, +\infty[$, on a
$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \cdot \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 2\,|x-y|\,.$$
Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que pour tout $x, y \in \,]0, +\infty[$ tel que $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ainsi f est uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4

Soit $\varepsilon > 0$ et P_ε la partition de $[0\,,4]$ donnée par
$$\mathrm{P}_\varepsilon = \{x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4\,, x_5\,, x_6\,, x_7\,, x_8\} = \left\{0\,, 1 - \frac{\varepsilon}{19}\,, 1 + \frac{\varepsilon}{19}\,, 2 - \frac{\varepsilon}{19}\,, 2 + \frac{\varepsilon}{19}\,, 3 - \frac{\varepsilon}{19}\,, 3 + \frac{\varepsilon}{19}\,, 4\right\}.$$
On voit alors que
$$\begin{aligned}
&\mathrm{m}_1(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 0\,, &&\mathrm{m}_2(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 0\,, &&\mathrm{m}_3(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 1\,,\\
&\mathrm{m}_4(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 1\,, &&\mathrm{m}_5(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 2\,, &&\mathrm{m}_6(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 2\,,\\
&\mathrm{m}_7(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 3\,, &&\mathrm{M}_1(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 0\,, &&\mathrm{M}_2(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 1\,,\\
&\mathrm{M}_3(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 1\,, &&\mathrm{M}_4(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 2\,, &&\mathrm{M}_5(f\,,\mathrm{P}_\varepsilon) = 3\,,
\end{aligned}$$

$$M_6(f\,,P_\varepsilon)=3\,,\quad M_7(f\,,P_\varepsilon)=3\,.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
s(f,P_\varepsilon) &= (x_3-x_2)+(x_4-x_3)+2(x_5-x_4)+2(x_6-x_5)+3(x_7-x_6)\\
&= \left(2-\frac{\varepsilon}{19}-\left(1+\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+\left(2+\frac{\varepsilon}{19}-\left(2-\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+2\left(3-\frac{\varepsilon}{19}-\left(2+\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)\\
&+\ 2\left(3+\frac{\varepsilon}{19}-\left(3-\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+3(4-\left(3+\frac{\varepsilon}{19}\right))\\
&= 1-\frac{2\varepsilon}{19}+\frac{2\varepsilon}{19}+2-\frac{4\varepsilon}{19}+\frac{4\varepsilon}{19}+3-\frac{3\varepsilon}{19}\\
&= 6-\frac{3\varepsilon}{19}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S(f,P_\varepsilon) &= (x_2-x_1)+(x_3-x_2)+2(x_4-x_3)+2(x_5-x_4)+3(x_6-x_5)+3(x_7-x_6)\\
&= \left(1+\frac{\varepsilon}{19}-\left(1-\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+\left(2-\frac{\varepsilon}{19}-\left(1+\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+2\left(2+\frac{\varepsilon}{19}-\left(2-\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)\\
&+\ 2\left(3-\frac{\varepsilon}{19}-\left(2+\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+3\left(3+\frac{\varepsilon}{19}-\left(3-\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)+3\left(4-\left(3+\frac{\varepsilon}{19}\right)\right)\\
&= \frac{2\varepsilon}{19}+1-\frac{2\varepsilon}{19}+\frac{4\varepsilon}{19}+2-\frac{4\varepsilon}{19}+\frac{6\varepsilon}{19}+3-\frac{3\varepsilon}{19}\\
&= 6+\frac{3\varepsilon}{19}\,.
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$S(f,P_\varepsilon)-s(f,P_\varepsilon)=\frac{6\varepsilon}{19}<\varepsilon\,,$$

et ainsi la fonction f est intégrable. Montrons à présent que

$$\int_0^4 f(x)dx=6\,.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note par P_n la partition de $[0\,,4]$ définie par

$$P_n=\left\{0\,,1-\frac{1}{19n}\,,1+\frac{1}{19n}\,,2-\frac{1}{19n}\,,2+\frac{1}{19n}\,,3-\frac{1}{19n}\,,3+\frac{1}{19n}\,,4\right\}\,.$$

Les calculs précédents montrent que $\inf\{s(f,P_n),n\geq 2\}=\inf\left\{6-\frac{1}{19n}\,,n\in\geq 2\right\}=6$ et $\sup\{S(f,P_n),n\geq 2\}=\sup\left\{6+\frac{1}{19n}\,,n\geq 2\right\}=6$. En utilisant que

$$\sup\{s(f,P_n),n\geq 2\}\leq\sup\{s(f,P),P\in\mathscr{P}_{0,4}\}=s(f)\leq S(f)=\inf\{S(f,P)\,,P\in\mathscr{P}_{0,4}\}\leq\inf\{S(f,P_n)\,,n\geq 2\}\,,$$

et donc $s(f)=S(f)=6$, i.e.

$$\int_0^4 f(x)dx=6\,.$$

On note par $\mathscr{P}_n$ la feuille de papier obtenue après n iterations et soit $\mathscr{E}_n$ l'épaisseur, en millimètres, de $\mathscr{P}_n$. En particulier, on a $\mathscr{E}_0 = 1$. Puisque pour passer de $\mathscr{P}_n$ a $\mathscr{P}_{n+1}$ on plie la feuille en deux, on voit que $\mathscr{E}_{n+1} = 2\mathscr{E}_n$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathscr{E}_n = 2^n \mathscr{E}_0 = 2^n \,.$$

Notons que 384400 kilomètres correspond a $384,4 \cdot 10^9$ millimètres. Ainsi, on a

$$\mathscr{E}_n > 384,4 \cdot 10^9 \Leftrightarrow 2^n := e^{n\ln(2)} > 384,4 \cdot 10^9 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(384,4 \cdot 10^9)}{\ln(2)}$$

En utilisant une calculatrice, on voit que le plus petit n vérifiant la condition précédente est $n = 39$.

Ps : Si vous réussissez à plier une feuille 39 fois et que partez quelques jours sur la lune, n'hésitez pas à m'envoyer une carte postale. Safe trip !