MAT 1741 - Midterm 1 - Version 2 - Correction

Exercice 1

1. Faux ! Soient A et B deux matrices de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$. On a
$$(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \cdot (\mathrm{A}-\mathrm{B}) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{B} \cdot \mathrm{B} = \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 - \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}\,.$$
Or, en général, on a $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$, ainsi, en général, $(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \cdot (\mathrm{A}-\mathrm{B}) \neq \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2$.
2. Faux ! Soit $\mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,, 4x + 7y - 10z = 5 \right\}$. On voit que le point $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à l'ensemble U. En effet, $4 \times 0 + 7 \times 0 - 10 \times 0 = 0 \neq 5$. En particulier, U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Vrai ! On a $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \subseteq \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. Le polynôme nul $\mathbf{0}$ appartient à $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. De plus, la somme de deux polynôme de degré au plus deux est un polynôme de degré au plus deux. Finalement, puisque le produit par une constante d'un polynôme de degré au plus deux est un polynôme de degré au plus deux, on obtient que $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
4. Faux ! $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.
5. Vrai ! Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}(3 \times 2)$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3)$. Alors, le produit $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$ a un sens et on a $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)$.
6. Vrai ! Soit $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ et soit $\mathrm{U} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)\,, \mathrm{A} = \mathrm{A}^t\}$. On a $\mathbf{0}^t = \mathbf{0}$. Ainsi, $\mathbf{0} \in \mathrm{U}$. A présent, soient A et B deux matrices de U (i.e. $\mathrm{A} = \mathrm{A}^t$ et $\mathrm{B} = \mathrm{B}^t$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^t = \mathrm{A}^t + \mathrm{B}^t = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,, \quad (\lambda \cdot \mathrm{A})^t = \lambda \cdot \mathrm{A}^t = \lambda \cdot \mathrm{A}\,,$$
i.e. $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ et $\lambda \cdot \mathrm{A}$ appartient à U. Ainsi, U est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.
7. Faux ! Soit $\mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,, xy \geqslant 0 \right\}$. On voit que $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{U}$. Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathrm{U}$ (i.e. $xy \geqslant 0$ et $x'y' \geqslant 0$). On a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$
et $(x+x')(y+y') = \underbrace{xy + x'y'}_{\geqslant 0} + xy' + x'y$. Ainsi, on voit que $(x+x')(y+y')$ n'est pas nécessairement positif. Trouvons un contre-exemple. On a $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs appartiennent à U. Or la somme $a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à U, car le produit de ses composantes et strictement négatif. Ainsi, U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
8. Faux ! Pour toutes matrices $\mathrm{A}\,, \mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)$, on a
$$(\mathrm{A}^t + \mathrm{B})^t = (\mathrm{A}^t)^t + \mathrm{B}^t = \mathrm{A} + \mathrm{B}^t$$
puisque $(\mathrm{A}^t)^t = \mathrm{A}$. Ainsi, $(\mathrm{A}^t + \mathrm{B})^t = (\mathrm{A}^t)^t + \mathrm{B}^t = \mathrm{A} + \mathrm{B}^t \neq \mathrm{A}^t + \mathrm{B}^t$.

Exercice 2

1. Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(4 \times 4)$ donnée par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche la matrice échelonnée réduite associée à A. On applique les opérations élémentaires vues en cours. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \mathrm{L}_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow (-1) \cdot \mathrm{L}_2 \text{ et } \mathrm{L}_3 \rightarrow (-1) \cdot \mathrm{L}_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, on a $\mathrm{rang}(A) = 3$.

2. Soit la matrice augmentée suivante

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— La matrice précédente est sous forme échelonnée réduite. On a deux pivots, et donc le rang est 2. On remarque d'ailleurs au passage que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}[A|b]$, ainsi, le système admet au moins une solution.

— Le système associé est de la forme

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 & = 5 \\ x_3 + x_4 & = 4 \end{cases}$$

et ainsi, les solutions du système linéaire sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} 5 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 \\ 4 - x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3

1. Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $A^4 = \mathrm{Id}_4$.

2. Puisque $150 = 4 \times 37 + 2$, on obtient que

$$A^{150} = A^{4\times37+2} = A^{4\times37} \cdot A^2 = (A^4)^{37} \cdot A^2 = \mathrm{Id}_4^{37} \cdot A^2 = \mathrm{Id}_4 \cdot A^2 = A^2\,,$$

i.e.

$$A^{150} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

1. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 + f_4 - f_3 & = 40 \\ f_1 + f_2 & = 50 \\ f_4 + f_5 & = 50 \\ f_2 + f_3 + f_5 & = 60 \end{cases}$$

ce qui se réécrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 40 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right)$$

2. En utilisant la matrice échelonnée donnée dans l'énoncé, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 - f_3 - f_5 & = -10 \\ f_2 + f_3 + f_5 & = 60 \\ f_4 + f_5 & = 50 \end{cases}$$

et on obtient alors que les solutions du système sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} -10 + f_3 + f_5 \\ 60 - f_5 - f_3 \\ f_3 \\ 50 - f_5 \\ f_5 \end{pmatrix}, f_3\,, f_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Puisque les flux sont positifs, on obtient que $f_3 \geqslant 0\,, f_5 \geqslant 0\,, 50 - f_5 \geqslant 0\,, -10 + f_3 + f_5 \geqslant 0\,, 60 - f_5 - f_3 \geqslant 0$, i.e. $10 \leqslant f_3 + f_5 \leqslant 60$

3. Le flux maximal sur l'axe CD est 50.
4. Non, il n'y aura pas d'embouteillage si l'on ferme l'axe CD. Cela signifie que $f_5 = 0$, et donc l'ensemble des flux possibles dans ce cas sont

$$f_1 = -10 + f_3\,, \quad f_2 = 60 - f_3\,, \quad f_4 = 50\,, \quad 10 \leqslant f_3 \leqslant 60\,.$$

BONUS

Soit $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ un espace vectoriel, soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $\mathbf{0}$ l'élément neutre de V. Par définition de $\mathbf{0}$, on a $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Ainsi, on a $k \cdot \mathbf{0} = k \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}$, i.e.

$$k \cdot \mathbf{0} = k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

Puisque $k \cdot \mathbf{0} \in \mathrm{V}$, il existe w tel que $k \cdot \mathbf{0} + w = w + k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Notons que $w = (-k) \cdot \mathbf{0}$. Ainsi, en ajoutant $w = (-k) \cdot \mathbf{0}$ à l'équation (1), on obtient que

$$\underbrace{k \cdot \mathbf{0} + (-k) \cdot \mathbf{0}}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{k \cdot \mathbf{0} + \underbrace{k \cdot \mathbf{0} + (-k) \cdot \mathbf{0}}_{=\mathbf{0}}}_{=k\cdot\mathbf{0}}\,,$$

i.e. $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.