



## Introduction à l'algèbre linéaire MAT 1741 D

Allan Merino

9 Février 2023

### Instructions:

- La durée de cet examen est de **70 minutes**.
- La question 1 comprend 8 énoncés. Vous devez déterminer si chaque énoncé est vrai. Chaque énoncé vaut 2 points. Il n'y a pas de points partiels. Inscrivez vos réponses dans le tableau fourni à la deuxième page.
- Les questions 2 à 4 sont à développement et valent 10 ou 12 points chacune. **Pour obtenir tous les points pour ces questions vos réponses doivent être justifiées et écrites de façon claire, logique et lisible.**
- La question 5 est une question bonus qui vaut 4 points. Pour obtenir des points pour cette question, votre solution doit être totalement correcte. Vous ne devriez étudier cette question qu'après avoir terminé toutes les autres.
- Vous n'avez le droit de consulter ni vos notes ni aucun livre. **Aucune calculatrice et aucun système de communication électronique ne sont autorisés.** Si vous avez de tels systèmes avec vous, ils doivent être éteints et rangés dans votre sac. Vous ne devez pas les avoir dans vos poches ou sur vous. Sinon, vous devrez quitter l'examen immédiatement et des allégations de fraude scolaire pourraient être déposées contre vous.

*En apposant votre signature ci-dessous, vous reconnaissez accepter cette instruction.*

- Bonne chance!

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Numéro d'étudiant : \_\_\_\_\_

Signature : \_\_\_\_\_

**Veillez encercler** votre section de DGD:

DGD 1 Lundi 1pm – 2.20pm Josh	DGD 2 Lundi 2.30pm – 3.50pm Khalil	DGD 3 Lundi 4pm – 5.20pm Patrick
-------------------------------------	--	--



(2) (a) En utilisant les trois opérations élémentaires vues en classe, trouvez la matrice échelonnée

réduite correspondant à la matrice  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . [8]

(b) Soit la matrice augmentée suivante

$$[A \mid b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

(i) Quel est  $\text{rang}(A)$ ? [1]

(ii) Donnez l'ensemble des solutions du système  $AX = b$ . [3]

(3) Soit  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

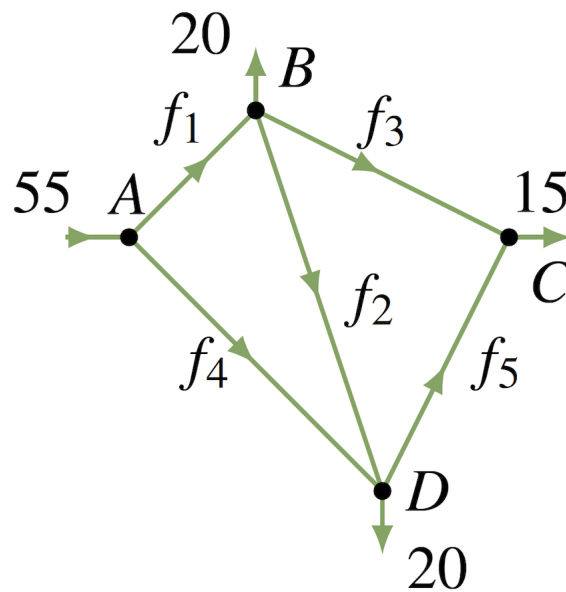
(a) Calculez  $A^2$ ,  $A^3$  et  $A^4$ . (Il n'est pas nécessaire de montrer tous vos calculs.) [6]

(b) En utilisant les observations faites dans la partie a), trouvez  $A^{2023}$ . [Indice:  $2023 = 4 \cdot 505 + 3$ ] [4]

(4) Dans le diagramme ci-dessous, vous trouverez un circuit automobile de routes à sens unique. À chaque heure, 55 véhicules rentrent par le point A et ressortent par le point B, C et D de la manière suivante

- 20 véhicules quittent le circuit par le point B,
- 15 véhicules quittent le circuit par le point C.
- 20 véhicules quittent le circuit par le point D.

On note par  $f_1, f_2, f_3, f_4$  et  $f_5$  le nombre de véhicules passant sur chaque axe routier.



(a) Trouvez le système linéaire correspondant au diagramme ci-dessus.

[4]

(b) La matrice échelonnée réduite du système linéaire précédent est donnée ci-dessous

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Trouvez les valeurs possible de chaque flux. (Si vous pensez qu'il n'y a pas de bornes inférieur ou supérieur possible, vous pouvez écrire  $f_i \in \mathbb{R}$ .) [4]

(c) Quel est le flux maximum sur l'axe CD?

[2]

(d) Si l'axe CD est fermé, est-ce qu'il y aura un embouteillage?

[2]

**Bonus:** Soient  $k \neq 0$  un scalaire et  $V$  un espace vectoriel. En n'utilisant que les 10 propriétés d'un espace vectoriel, démontrez que  $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$ . [4]

Q1	Q2	Q3	Q4	B	Total



