MAT 1741 - Midterm 1 - Version 1 - Correction

Exercice 1

1. Faux ! Soit $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 2)$ et $B \in \mathrm{Mat}(2 \times 3)$. Alors, le produit $A \cdot B$ a un sens et on a $A \cdot B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)$.
2. Vrai ! Soit $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , 4x + 7y - 10z = 0 \right\}$. On a
$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , 4x + 7y - 10z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{4}y + \frac{5}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} , y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$
3. Faux ! Soit $\mathbf{0}$ le polynôme nul de $\mathbb{R}[X]$. On a $\mathbf{0}(7) = 0 \neq 1$. Ainsi, $\mathbf{0}$ n'appartient pas à l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X] , P(7) = 1\}$, et donc ce dernier n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
4. Vrai ! Soit $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ et soit $U = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2) , A = A^t\}$. On a $\mathbf{0}^t = \mathbf{0}$. Ainsi, $\mathbf{0} \in U$. A présent, soient A et B deux matrices de U (i.e. $A = A^t$ et $B = B^t$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a
$$(A + B)^t = A^t + B^t = A + B , \quad (\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t = \lambda \cdot A ,$$
i.e. $A + B$ et $\lambda \cdot A$ appartient à U. Ainsi, U est un sous-espace vectoriel de U.
5. Faux ! Soient A et B deux matrices de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$. On a
$$(A + B) \cdot (A - B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B = A^2 - B^2 - A \cdot B + B \cdot A .$$
Or, en général, on a $A \cdot B \neq B \cdot A$, ainsi, en général, $(A + B) \cdot (A - B) \neq A^2 - B^2$.
6. Faux ! Soit $U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 , xy \geqslant 0 \right\}$. On voit que $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$. Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in U$ (i.e. $xy \geqslant 0$ et $x'y' \geqslant 0$). On a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$
et $(x + x')(y + y') = \underbrace{xy + x'y'}_{\geqslant 0} + xy' + x'y$. Ainsi, on voit que $(x + x')(y + y')$ n'est pas nécessairement positif. Trouvons un contre-exemple. On a $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs appartiennent à U. Or la somme $a + b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à U, car le produit de ses composantes et strictement négatif. Ainsi, U n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
7. Faux ! $\mathbb{R}^2$ n'est pas un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

8. Vrai ! Pour toutes matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3)$, on a

$$(A^t + B)^t = (A^t)^t + B^t = A + B^t$$

puisque $(A^t)^t = A$.

Exercice 2

1. Soit A la matrice de $\mathrm{Mat}(4 \times 4)$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche la matrice échelonnée réduite associée à A. On applique les opérations élémentaires vues en cours. On a

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \quad & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \quad & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \quad & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\
L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{2}L_2 \quad & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 \leftrightarrow L_4 \quad & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \quad & \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, on a $\mathrm{rang}(A) = 3$.

2. Soit la matrice augmentée suivante

$$[A|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

— La matrice précédente est sous forme échelonnée réduite. On a deux pivots, et donc le rang est 2. On remarque d'ailleurs au passage que $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}[A|b]$, ainsi, le système admet au moins une solution.

— Le système associé est de la forme

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 & = 3 \\ x_2 - x_4 & = 4 \end{cases}$$

et ainsi, les solutions du système linéaire sont

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 - 2x_3 - x_4 \\ 4 + x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3

1. Soit A la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $A^4 = \mathrm{Id}_4$.

2. Puisque $2023 = 4 \times 505 + 3$, on obtient que

$$A^{2023} = A^{4\times 505+3} = A^{4\times 505} \cdot A^3 = (A^4)^{505} \cdot A^3 = \mathrm{Id}_4^{505} \cdot A^3 = \mathrm{Id}_4 \cdot A^3 = A^3 ,$$

i.e.

$$A^{2023} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Exercice 4

1. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 + f_4 & = 55 \\ f_2 + f_4 - f_5 & = 20 \\ f_3 + f_5 & = 15 \\ f_1 - f_2 - f_3 & = 20 \end{cases}$$

ce qui se réécrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 15 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

2. En utilisant la matrice échelonnée donnée dans l'énoncé, on obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 + f_4 & = 55 \\ f_2 + f_4 - f_5 & = 20 \\ f_3 + f_5 & = 15 \end{cases}$$

et donc les solutions du système sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 55 - f_4 \\ 20 - f_4 + f_5 \\ 15 - f_5 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix} , f_4 , f_5 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Puisque les flux sont positifs, on obtient que $f_4 \geqslant 0 , f_5 \geqslant 0 , 55 - f_4 \geqslant 0 , 20 - f_4 + f_5 \geqslant 0 , 15 - f_5$, i.e. $0 \leqslant f_4 \leqslant 55 , 0 \leqslant f_5 \leqslant 15$ et $0 \leqslant f_4 - f_5 \leqslant 20$.

3. Le flux maximal sur l'axe CD est 15.

4. Non, il n'y aura pas d'embouteillage si l'on ferme l'axe CD. Cela signifie que $f_5 = 0$, et donc l'ensemble des flux possibles dans ce cas sont

$$f_1 = 55 - f_4\,, \quad f_2 = 20 - f_4\,, \quad f_3 = 15\,, \quad 0 \leqslant f_4 \leqslant 20\,.$$

$\boxed{\textbf{BONUS}}$

Soit $(\mathrm{V}\,,+\,,\cdot)$ un espace vectoriel, soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $\mathbf{0}$ l'élément neutre de V. Par définition de $\mathbf{0}$, on a $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Ainsi, on a $k \cdot \mathbf{0} = k \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}$, i.e.

$$k \cdot \mathbf{0} = k \cdot \mathbf{0} + k \cdot \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

Puisque $k \cdot \mathbf{0} \in \mathrm{V}$, il existe w tel que $k \cdot \mathbf{0} + w = w + k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Notons que $w = (-k) \cdot \mathbf{0}$. Ainsi, en ajoutant $w = (-k) \cdot \mathbf{0}$ à l'équation (1), on obtient que

$$\underbrace{k \cdot \mathbf{0} + (-k) \cdot \mathbf{0}}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{k \cdot \mathbf{0} + \underbrace{k \cdot \mathbf{0} + (-k) \cdot \mathbf{0}}_{=\mathbf{0}}}_{=k\cdot\mathbf{0}}\,,$$

i.e. $k \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.