MAT 1741 - DGD 4 - Bases d'un espace vectoriel

Exercice 1

Pour quelles valeurs du paramètre réel t la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\3\end{pmatrix}\right\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Même question avec la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dans le base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 3

Montrer que les polynômes $P_1(X) = (X-1)^2$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$ forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner les coordonnées du polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ dans cette base.

Exercice 4

Donner une base de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ donnés par

$$A_1 = \left\{\begin{pmatrix}a & a+b\\0 & 2a\end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\right\}, \quad A_2 = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, a + 2b + c = 0 \text{ et } b + c - 2d = 0\right\}.$$

$$A_3 = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}, a + d = 0\right\}.$$

Exercice 5

Montrer que $U = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P'(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et trouver une base de U.

Exercice 6

Soient U_1 et U_2 les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$\mathrm{U}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,, x - 2y + z = 0 \right\} , \quad \mathrm{U}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,, 2x - y + 2z = 0 \right\} .$$

Déterminer une base de U_1, une base de U_2 et une base de $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$.

Exercice 7

Soient $\mathrm{F}\,,\mathrm{G}$ et H les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$\mathrm{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,, 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\} , \quad \mathrm{G} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,, y - 4z + 3t = 0 \right\} ,$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

1. Déterminer des bases de $\mathrm{F}\,,\mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.
2. Montrer que $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.
3. En déduire que $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.

Exercice 8

Soient $w_1\,, w_2\,, w_3\,, w_4\,, v_1\,, v_2\,, v_3$ les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ donnés par

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

1. Montrer que $\{v_1\,, v_2\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ mais que $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ ne l'est pas .
2. Montrer que $\{w_1\,, w_2\,, w_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ mais que $\{w_1\,, w_2\,, w_3\,, w_4\}$ ne l'est pas .
3. Montrer que $\{v_1\,, v_2\,, w_1\,, w_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$.