MAT 1741 - DGD 4 - Correction

On rappelle le théorème suivant :

Théorème 1

Soit $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ *un espace vectoriel de dimension n.*

1. *Soit* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *une famille libre de vecteurs de* V. *Alors* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *est une base de* V.
2. *Soit* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *une famille génératrice de vecteurs de* V. *Alors* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *est une base de* V.

De plus, pour tout $m \in \mathbb{R}^*$, *on a* $\dim(\mathbb{R}^m) = m$ *et* $\dim(\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]) = m + 1$.

Exercice 1

Soient v_1 et v_2 les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

En utilisant le Théorème 1, on obtient que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 = \mathbf{0}$., i.e.

$$\begin{cases} a + bt &= 0 \\ at + 3b &= 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Si $t = 0$, on obtient directement que $a = b = 0$, et donc $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. Supposons à présent que $t \neq 0$. On a alors

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ t & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - tL_1 \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 3 - t^2 & 0 \end{array}\right)$$

i.e.

$$\begin{cases} a + bt &= 0 \\ (3 - t^2)b &= 0 \end{cases}$$

— Si $3 - t^2 \neq 0$, alors $b = 0$ et donc $a = b = 0$. En particulier, $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

— Si $3 - t^2 = 0$ (i.e. $t \in \{\pm\sqrt{3}\}$), on a alors $a = -tb$, et donc $b = -\frac{a}{t}$. Ainsi, $\{v_1 , v_2\}$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^2$.

Finalement, on obtient que $\{v_1 , v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $t \notin \{\pm\sqrt{3}\}$.

A présent, soient w_1 , w_2 et w_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \in \mathbb{R}) .$$

En utilisant le Théorème 1, on obtient que $\{w_1 , w_2 , w_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\{w_1 , w_2 , w_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $a , b , c \in \mathbb{R}$ tels que $aw_1 + bw_2 + cw_3 = \mathbf{0}$., i.e.

$$\begin{cases} a + b + tc & = 0 \\ b & = 0 \\ at + bt + c & = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & t & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On a donc $b = 0$. Ainsi, on a le système

$$\begin{cases} a + tc & = 0 \\ at + c & = 0 \end{cases}$$

(avec $b = 0$ bien évidemment) ou bien sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Si $t = 0$, on obtient directement que $a = c = 0$, et donc $\{w_1 , w_2 , w_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Supposons à présent que $t \neq 0$. On a alors

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\color{red}{L_2 \leftarrow L_2 - tL_1} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 - t^2 & 0 \end{array}\right)$$

i.e.

$$\begin{cases} a + ct & = 0 \\ (1 - t^2)c & = 0 \end{cases}$$

— Si $1 - t^2 \neq 0$, alors $c = 0$ et donc $a = c = 0$. En particulier, $\{w_1 , w_2 , w_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

— Si $1 - t^2 = 0$ (i.e. $t \in \{\pm 1\}$), on a alors $a = -tc$, et donc $c = -\frac{a}{t}$. Ainsi, $\{w_1 , w_2 , w_3\}$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Finalement, on obtient que $\{w_1 , w_2 , w_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $t \notin \{\pm 1\}$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$

Soient $v_1\,, v_2$ et v_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant le Théorème 1, on obtient que $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \mathbf{0}$., i.e.

$$\begin{cases} a + b + c & = 0 \\ b + c & = 0 \\ a + c & = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On applique alors le Pivot de Gauss. On a

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 - L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)
\end{array}$$

i.e. $a = b = c = 0$. Ainsi $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ et donc une base.

A présent, soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Puisque $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, il existe des uniques scalaires $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ tels que $v = av_1 + bv_2 + cv_3$. On obtient donc le système

$$\begin{cases} a + b + c & = 1 \\ b + c & = 0 \\ a + c & = 0 \end{cases}$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle comme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

On applique alors le Pivot de Gauss. On a

$$\begin{array}{rc}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 - L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right)
\end{array}$$

i.e. $a = b = 1$ et $c = -1$. Finalement,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc les coordonnées de v dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ sont $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Soient P_1, P_2 et P_3 les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ donnés par

$$P_1(X) = (X-1)^2, \qquad P_2(X) = X^2, \qquad P_3(X) = (X+1)^2.$$

En utilisant le Théorème 1, on obtient que $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $aP_1 + bP_2 + CP_3 = \mathbf{0}$. On a

$$aP_1(X) + bP_2(X) + CP_3(X) = (a+b+c)\,X^2 + (-2a+2c)\,X + (a+c),$$

et puisque un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+c & = 0 \\ -2a+2c & = 0 \\ a+c & = 0 \end{cases}$$

qui se réécrit sous forme matricielle comme suit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

On applique le Pivot de Gauss. On a :

$$\begin{array}{rc}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow (-1)L_3 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)
\end{array}$$

et donc $a = b = c = 0$. Ainsi $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$ et donc une base.
A présent, soit $P(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque $\{P_1, P_2, P_3\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, il existe des uniques scalaires $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = aP_1(X) + bP_2(X) + cP_3(X)$, i.e.

$$(a+b+c)X^2 + (-2a+2c)X + (a+c) = X^2 + X + 1.$$

On obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ -2a+2c &= 1 \\ a+c &= 1 \end{cases}$$

qui se réécrit sous forme matricielle comme suit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

On applique le Pivot de Gauss. On a :

$$
\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow (-1)L_3 \text{ et } L_3 \leftrightarrow L_2 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

et donc $a = \frac{1}{4}$, $b = 0$ et $c = \frac{3}{4}$. Ainsi, on a

$$X^2 + X + 1 = \frac{1}{4} \cdot (X-1)^2 + 0 \cdot X^2 + \frac{3}{4} \cdot (X+1)^2,$$

et donc les coordonnées de $P(X)$ dans la base $\{P_1, P_2, P_3\}$ sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Par la suite, on pourra utiliser le Lemme suivant dans les exercices.

Lemme 1

Soit $(V, +, \cdot)$ un espace vectoriel et $u, v \in V$. Alors $\{u, v\}$ est une famille libre de V si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Exercice 4

Commençons par A_1. On a

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ 0 & 2a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \{v_1, v_2\} .
\end{aligned}$$

De plus, d'après le Lemme 1, on obtient que $\{v_1, v_2\}$ forme une base de A_1.

Regardons à présent A_2. On a $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{cases} a+2b+c & = 0 \\ b+c-2d & = 0 \end{cases} \right\}$. On commence par résoudre le système

$$\begin{cases} a+2b+c & = 0 \\ b+c-2d & = 0 \end{cases}$$

qui se réécrit sous forme matricielle comme suit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

On applique le Pivot de Gauss. On a

$$\begin{array}{cc}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)
\end{array}$$

et on obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} a & = c-4d \\ b & = -c+2d \end{cases}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{cases} a+2b+c & = 0 \\ b+c-2d & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{cases} a & = c-4d \\ b & = -c+2d \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} c-4d & -c+2d \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4d & 2d \\ 0 & d \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ c \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=w_2} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \{w_1, w_2\} .
\end{aligned}$$

De plus, d'après le Lemme 1, on obtient que $\{w_1, w_2\}$ forme une base de A_2.

Finalement, cherchons une base de A_3. On a

$$\begin{aligned}
A_3 &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a+d=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=x_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=x_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=x_3}\right\} \\
&= \operatorname{Vect}\{x_1, x_2, x_3\} .
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\{x_1, x_2, x_3\}$ est une famille libre de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$, et donc $\{x_1, x_2, x_3\}$ est une base de A_3.

Exercice 5

Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par

$$\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = P'(0) = 0\} .$$

Soit $P(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$ un polynôme de U. On a $P(0) = a$, et puisque $P \in U$, on a $P(0) = 0$, et on obtient donc que $a = 0$. De même, on a $P'(x) = b + 2cX + 3dX^2$. De nouveau, on a $P'(0) = b$, et puisque $P \in U$, on a $P'(0) = 0$, et on obtient donc que $b = 0$. Ainsi, P est de la forme $P(X) = cX^2 + dX^3$. On voit facilement que tout polynôme de la forme $cX^2 + dX^3$ est un polynôme de U, et donc

$$U = \left\{cX^2 + dX^3, c, d \in \mathbb{R}\right\} = \operatorname{Vect}\left\{X^2, X^3\right\} .$$

De nouveau, d'après le Lemme 1, on obtient que $\{X^2, X^3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$, et donc une base de U.

Exercice 6

Soit U_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$U_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\right\} .$$

On a

$$U_1 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - 2y + z = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\} .
\end{aligned}
$$

D'après le Lemme 1, on obtient que $\{v_1, v_2\}$ forme une base de U_1.
A présent, soit U_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$
\mathrm{U}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 2z = 0 \right\} .
$$

On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 2x - y + 2z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x + 2z \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, x, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=w_2} \right\} = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2\} .
\end{aligned}
$$

D'après le Lemme 1, on obtient que $\{w_1, w_2\}$ forme une base de U_2.
Finissons avec $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$. On a

$$
\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ 2x - y + 2z & = 0 \end{cases} \right\} .
$$

On résoud donc le système linéaire homogène

$$
\begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ 2x - y + 2z & = 0 \end{cases}
$$

qui se réécrit sous forme matricielle comme

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)
$$

On applique le Pivot de Gauss. On a

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right)
$$

$$
\begin{array}{rl}
L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{array}
$$

et donc l'ensemble des solutions de ce système est le sous-ensemble (même sous-espace vectoriel) de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$
\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, , x + z = 0 \, , y = 0 \right\} .
$$

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
U_1 \cap U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, , \begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ 2x - y + 2z & = 0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} , x + z = 0 \, , y = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=x_1} \right\} \\
&= \mathrm{Vect} \{ x_1 \} \, .
\end{aligned}
$$

On a donc que $\{x_1\}$ est une base de $U_1 \cap U_2$, et en particulier, on a

$$
\dim(U_1) = 2 \, , \qquad \dim(U_2) = 2 \, , \qquad \dim(U_1 \cap U_2) = 1 \, .
$$

Lemme 2

Soit $(V, , +, \cdot)$ un espace vectoriel, U un sous-espace vectoriel de V et $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de U. Alors

$$
\mathrm{Vect} \{ u_1 , \ldots , u_n \} \subseteq U \, .
$$

Exercice 7

1. Commençons par le sous-espace vectoriel F. On a

$$
\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \, , 2x - y + 4z + 3t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x + 4z + 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \, , x, z, t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} , x, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , x, z, t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}
$$

$$= \quad \text{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}}_{=v_3} \right\} = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}\ .$$

On vérifie facilement que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont libres dans $\mathbb{R}^4$. En effet, soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \mathbf{0}$. On obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} a & = 0 \\ 2a + 4b + 3c & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \end{cases}$$

i.e. $a = b = c = 0$. Ainsi, $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de F.
Regardons à présent le sous-espace vectoriel G. On a :

$$\begin{aligned} \text{F} &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, y - 4z + 3t = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\4z-3t\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, x, z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix}x\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4z\\z\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3t\\0\\t\end{pmatrix}, x, z, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}, x, z, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{=w_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\1\\0\end{pmatrix}}_{=w_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\-3\\0\\1\end{pmatrix}}_{=w_3} \right\} = \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}\ . \end{aligned}$$

De nouveau, on montre facilement que la famille de vecteurs $\{w_1, w_2, w_3\}$ est libre et donc une base de G.
Finalement, on cherche une base de F $\cap$ G. Notons que

$$\text{F} \cap \text{G} = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 2x - y + 4z + 3t & = 0 \\ y - 4z + 3t & = 0 \end{cases} \right\}.$$

On commence tout d'abord par résoudre le système linéaire homogène suivant

$$\begin{cases} 2x - y + 4z + 3t & = 0 \\ y - 4z + 3t & = 0 \end{cases}$$

qui se réécrit sous forme matricielle comme suit

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \right).$$

On applique de nouveau notre algorithme du Pivot de Gauss. On a

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 & \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

ce qui nous donne donc que

$$\begin{cases} x & = -3t \\ y & = 4z - 3t \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} F \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,, \begin{cases} 2x - y + 4z + 3t & = 0 \\ y - 4z + 3t & = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,, x = -3t \,, y = 4z - 3t \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ 4z - 3t \\ z \\ t \end{pmatrix} , z , t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -3t \\ -3t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} , z , t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , z , t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= x_1} , \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{= x_2} \right\} = \operatorname{Vect} \{ x_1 , x_2 \} \,. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1, on obtient que $\{x_1 , x_2\}$ est une base de $F \cap G$. En particulier, on a

$$\dim(F) = 3 \,, \qquad \dim(G) = 3 \,, \qquad \dim(F \cap G) = 2 \,.$$

2. Soit $H = \operatorname{Vect}\{f_1 , f_2 , f_3\}$, où f_1 , f_2 , f_3 sont donnés par

$$f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} , \qquad f_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

En utilisant le Lemme 2, il suffit de montrer que f_1 , f_2 et f_3 appartiennent à $F \cap G$. Regardons f_1. On sait que $\{x_1 , x_2\}$ est une base de $F \cap G$. On cherche donc des constantes $a , b \in \mathbb{R}$ tels que $f_1 = a x_1 + b x_2$, i.e.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

ce qui revient à se demander si le système suivant admet une solution

$$\begin{cases} -3a & = -3 \\ -3a + 4b & = 1 \\ b & = 1 \\ a & = 1 \end{cases}$$

On voit facilement que $a = b = 1$ est une solution du système précédent, et donc $f_1 = x_1 + x_2$, i.e. $f_1 \in \operatorname{Vect}\{x_1, x_2\}$. De la même manière, on vérifie facilement que

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

i.e. $f_2, f_3 \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Finalement, en utilisant le Lemme 2, on obtient que

$$\mathrm{H} = \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathrm{F} \cap \mathrm{G}.$$

3. On a $\operatorname{Vect}\{f_1, f_2\} \subseteq \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, f_3\}$. Or, puisque f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires, on obtient que $\dim(\operatorname{Vect}\{f_1, f_2\}) = 2$. De même, on a vu que $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = 2$. Puisque

$$\operatorname{Vect}\{f_1, f_2\} \subseteq \operatorname{Vect}\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq \mathrm{F} \cap \mathrm{G},$$

et $2 = \dim(\operatorname{Vect}\{f_1, f_2\}) = \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G})$, on obtient que $\dim(\mathrm{H}) = 2$, et donc $\mathrm{H} = \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$.