MAT 1741 - DGD 3 - Familles génératrices et familles libres

Exercice 1

1. Soit n un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'ensemble U donné par

$$\mathrm{U} := \{v \in \mathbb{R}^n \,, v \cdot \mathrm{n} = 0\}$$

   est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, où $\cdot$ correspond au produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $\mathrm{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathrm{U} := \{v \in \mathbb{R}^n \,, v \cdot \mathrm{n} = 0\} \,.$$

   Trouver deux vecteurs v_1 , v_2 de U tels que $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\{v_1 , v_2\}$ (en d'autres termes, trouver une équation paramétrique du plan U). Montrer que ces deux vecteurs forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit U le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$\mathrm{U} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,, x + y + z - t = 0 \right\} \,.$$

   Trouver trois vecteurs v_1 , v_2 et v_3 de $\mathbb{R}^4$ tels que $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\{v_1 , v_2 , v_3\}$. Montrer que ces vecteurs forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Montrer que $\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercice 3

Soit $(\mathrm{V} , + , \cdot)$ un espace vectoriel.

1. Soient u et v deux vecteur de V. Montrer que $\mathrm{Vect}\{u , v\} = \mathrm{Vect}\{u , u + v\} = \mathrm{Vect}\{u - v , u + v\}$.
2. Soient $u , v , w \in \mathrm{V}$. Montrer que $\mathrm{Vect}\{v , w\} = \mathrm{Vect}\{u , v , w\}$ si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}\{v , w\}$.
3. Soit $\mathrm{V} = \mathbb{R}^3$ et soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Est-ce que $\mathrm{Vect}\{u , v\} = \mathrm{Vect}\{u , u \star v\}$? ($\star$ correspond au produit vectoriel sur $\mathbb{R}^3$).

Exercice 4

Soit $(\mathrm{V}\,,+\,,\cdot)$ un espace vectoriel. Soient U_1 et U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ est un sous-espace vectoriel de V. Est-ce que $\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$ est un sous-espace vectoriel de V ?

Exercice 5

1. Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ á valeur dans $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $\{1\,,\cos(x)\,,\sin(x)\}$ est libre dans $\mathscr{F}(\mathbb{R})$. Même question avec $\left\{1\,,\cos^2(x)\,,\sin^2(x)\right\}$.
2. Soit $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ les polynômes $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = a+4\,\mathrm{X}+\mathrm{X}^2$, $\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = 1+\mathrm{X}$ et $\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$.
3. Montrer que $\mathrm{P}_1(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^2$, $\mathrm{P}_2(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2$ et $\mathrm{P}_3(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)^2$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Montrer que cette famille est libre.

Exercice 6

1. Montrer que les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,\{v_1\,,v_2\,,v_3\}$.
2. Montrer que les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,\{w_1\,,w_2\,,w_3\}$.