MAT 1741 - DGD 3 - Correction

Exercice 1

1. Tout d'abord, on a $\mathbf{0} \cdot \mathrm{n} = 0$, i.e. $\mathbf{0} \in \mathrm{U}$. Montrons la stabilité par rapport à l'addition. Soient $u, v \in \mathrm{U}$. En particulier, on a $u \cdot \mathrm{n} = v \cdot \mathrm{n} = 0$. Ainsi, on a

$$(u+v) \cdot \mathrm{n} = u \cdot \mathrm{n} + v \cdot \mathrm{n} = 0 + 0 = 0,$$

i.e. $u + v \in \mathrm{U}$. De même, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$(\alpha u) \cdot \mathrm{n} = \alpha u \cdot \mathrm{n} = 0,$$

et donc $\alpha u \in \mathrm{U}$. Ainsi, U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

2. Tout d'abord, en utilisant la question précédente, le sous-ensemble U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 , x + 2y + 3z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} , y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} , y, z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , y, z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1} , \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2} \right\} .
\end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$. Montrons à présent que $\{v_1, v_2\}$ forment une famille libre. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 = \mathbf{0}$. On a alors

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a - 3b \\ a \\ b \end{pmatrix},$$

et on obtient donc le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -2a - 3b & = 0 \\ a & = 0 \\ b & = 0 \end{cases} .$$

Finalement, $a = b = 0$ et donc $\{v_1, v_2\}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

3. On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,, x+y+z-t=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -y-z+t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} , y\,, z\,, t \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , y\,, z\,, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_3} \right\},
\end{aligned}
$$

i.e. $\mathrm{U} = \mathrm{Vect}\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$. Montrons que $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Soient $a\,, b\,, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \mathbf{0}$, i.e.

$$
\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b+c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix},
$$

i.e.

$$
\begin{cases} -a-b+c & = 0 \\ a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \end{cases}
$$

Ainsi, $a = b = c = 0$ et donc $\{v_1\,, v_2\,, v_3\}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

On notera par $v_1\,, v_2\,, w_1\,, w_2$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$
v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Montrons que $\mathrm{Vect}\{v_1\,, v_2\} = \mathrm{Vect}\{w_1\,, w_2\}$. Commençons par montrer que les vecteurs v_1 et v_2 sont combinaison linéaire des vecteurs w_1 et w_2. On regarde tout d'abord v_1. On cherche donc $a\,, b \in \mathbb{R}$ tels que $v_1 = aw_1 + bw_2$. Cela se réécrit comme suit

$$
\begin{cases} 0 & = a - b \\ 1 & = a + b \\ 1 & = 2a \end{cases}
$$

i.e. $a = b = \frac{1}{2}$. Ainsi, $v_1 = \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2$. De la même manière, on cherche $c\,, d \in \mathbb{R}$ tels que $v_2 = cw_1 + dw_2$. Cela se réécrit comme suit

$$
\begin{cases} 1 & = c - d \\ 0 & = c + d \\ 1 & = 2c \end{cases}
$$

i.e. $c = \frac{1}{2}$ et $d = -\frac{1}{2}$. Ainsi, $v_2 = \frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2$. On a donc

$$\begin{aligned}\text{Vect}\{v_1, v_2\} &= \{av_1 + bv_2, a, b \in \mathbb{R}\} = \left\{a\left(\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}w_2\right) + b\left(\frac{1}{2}w_1 - \frac{1}{2}w_2\right), a, b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)w_1 + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)w_2, a, b \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \text{Vect}\{w_1, w_2\}\end{aligned}$$

Si on veut être précis, on obtient pour le moment une inclusion (i.e. $\text{Vect}\{v_1, v_2\} \subseteq \text{Vect}\{w_1, w_2\}$), et non une égalité. Pour montrer que l'on a l'égalité, on a deux possibilités :

- On montre l'autre inclusion, i.e. $\text{Vect}\{w_1, w_2\} \subseteq \text{Vect}\{v_1, v_2\}$,
- On montre que pour tout $c, d \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $c = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ et $d = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$.

Le deuxième point est plus rapide. On voit facilement que pour $a = c + d$ et $d = c - d$. Ainsi $\text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$.

Exercice 3

On montre tout d'abord le résultat suivant pour simplifier.

Lemme 1

Soit $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ un espace vectoriel et soient $v_1, \ldots, v_n$ des éléments de V. Supposons que $a, b \in \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$. Alors $\text{Vect}\{a, b\} \subseteq \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Démonstration. On a vu en cours que $\text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un espace vectoriel. En particulier, si $a, b \in \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\alpha a, \beta b \in \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$ et donc $\alpha a + \beta b \in \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ainsi $\text{Vect}\{a, b\} \subseteq \text{Vect}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

□

1. Soient u et v deux vecteurs de V. Pour montrer que $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u, u+v\}$, on va montrer que $u, v \in \text{Vect}\{u, u+v\}$ (d'après le lemme précédent, cela implique que $\text{Vect}\{u, v\} \subseteq \text{Vect}\{u, u+v\}$) et que $u, u+v \subseteq \text{Vect}\{u, v\}$ (de nouveau, d'après le lemme précédent, cela implique que $\text{Vect}\{u, u+v\} \subseteq \text{Vect}\{u, v\}$). On obtiendra alors l'égalité par double inclusion.

   On a $u \in \text{Vect}\{u, u+v\}$ car $u = 1\cdot u + 0\cdot(u+v)$ et $v \in \text{Vect}\{u, u+v\}$ car $v = (-1)\cdot u + 1\cdot(u+v)$, i.e. $\text{Vect}\{u, v\} \subseteq \text{Vect}\{u, u+v\}$. De même, on a $u \in \text{Vect}\{u, v\}$ car $u = 1\cdot u + 0\cdot v$ et $u + v \in \text{Vect}\{u, v\}$ car $u + v = 1\cdot u + 1\cdot v$, i.e. $\text{Vect}\{u, u+v\} \subseteq \text{Vect}\{u, v\}$. Finalement, $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u, u+v\}$.

   On applique le même raisonnement pour montrer que $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u - v, u+v\}$. On a $u \in \text{Vect}\{u - v, u+v\}$ car $u = \frac{1}{2}\cdot(u-v) + \frac{1}{2}\cdot(u+v)$ et $v \in \text{Vect}\{u - v, u+v\}$ car $v = -\frac{1}{2}\cdot(u-v) + \frac{1}{2}\cdot(u+v)$, i.e. $\text{Vect}\{u, v\} \subseteq \text{Vect}\{u - v, u+v\}$. De même, on a $u - v \in \text{Vect}\{u, v\}$ car $u = 1\cdot u + (-1)\cdot v$ et $u + v \in \text{Vect}\{u, v\}$ car $u + v = 1\cdot u + 1\cdot v$, i.e. $\text{Vect}\{u - v, u+v\} \subseteq \text{Vect}\{u, v\}$. Finalement, $\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u - v, u+v\}$.

   En conclusion, on a

$$\text{Vect}\{u, v\} = \text{Vect}\{u, u+v\} = \text{Vect}\{u - v, u+v\}.$$

2. Soient $u, v, w \in \mathrm{V}$. Tout d'abord, on sait que $\operatorname{Vect}\{v, w\} \subseteq \operatorname{Vect}\{u, v, w\}$. Ainsi, on a $\operatorname{Vect}\{v, w\} = \operatorname{Vect}\{u, v, w\}$ si et seulement si $\operatorname{Vect}\{u, v, w\} \subseteq \operatorname{Vect}\{v, w\}$. Or, $u \in \operatorname{Vect}\{u, v, w\}$. Ainsi, si $\operatorname{Vect}\{u, v, w\} \subseteq \operatorname{Vect}\{v, w\}$, alors $u \in \operatorname{Vect}\{v, w\}$. De même, si $u \in \operatorname{Vect}\{v, w\}$, alors, $u, v, w \in \operatorname{Vect}\{v, w\}$ et en utilisant le lemme précédent, on a $\operatorname{Vect}\{u, v, w\} \subseteq \operatorname{Vect}\{v, w\}$. Finalement, $\operatorname{Vect}\{u, v, w\} \subseteq \operatorname{Vect}\{v, w\}$ si et seulement si $u \in \operatorname{Vect}\{v, w\}$.

3. On va prendre un contre-exemple. Prenons $u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. On a $u \star v = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \star \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Or

$$\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \neq \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 4

Soient U_1 et U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. Montrons que $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

— Puisque U_1 et U_2 sont des sous-espaces vectoriels de V, on a $\mathbf{0} \in \mathrm{U}_1$ et $\mathbf{0} \in \mathrm{U}_2$. Ainsi, $\mathbf{0} \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$.

— Soient $u, v \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$. On a $u, v \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 \subseteq \mathrm{U}_1$, et puisque U_1 est un sous-espace vectoriel de V, alors $u + v \in \mathrm{U}_1$. De même, en utilisant que $u, v \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 \subseteq \mathrm{U}_2$ et que U_2 est un sous-espace vectoriel de V, on obtient que $u + v \in \mathrm{U}_2$. Ainsi, $u + v \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$.

— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$. Puisque $u \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 \subseteq \mathrm{U}_1$ et U_1 sous-espace vectoriel de V, on a $\lambda u \in \mathrm{U}_1$. De même, puisque $u \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2 \subseteq \mathrm{U}_2$, on obtient que $\lambda u \in \mathrm{U}_2$ car U_2 est un sous-espace vectoriel de V. Ainsi, $\lambda u \in \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$.

Finalement, $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ est un sous-espace vectoriel de V.
Pour l'union, la situation est très différente. Prenons un contre-exemple. Prenons $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2$. Comme vu en cours, pour tout $v \in \mathrm{V}$, le sous-ensemble

$$\{\alpha v, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

est un sous-espace vectoriel de V. Prenons deux vecteurs particuliers. Soient $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ et U_1 et U_2 les sous-espaces vectoriels de V donnés par

$$\mathrm{U}_1 = \{\alpha v_1, \alpha \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}\right\}, \quad \mathrm{U}_2 = \{\beta v_2, \beta \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

On a $v_1 \in \mathrm{U}_1 \subseteq \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$ et $v_2 \in \mathrm{U}_2 \subseteq \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$, Ainsi, v_1 et v_2 appartient à $\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$. On a $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Or, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{U}_1$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{U}_2$, et donc $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \notin \mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$. Ainsi, $\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$ n'est pas stable par addition, et donc $\mathrm{U}_1 \cup \mathrm{U}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 5

1. Montrons que l'ensemble des fonctions

$$\{f_1(x) = 1\,, f_2 = \cos(x)\,, f_3 = \sin(x)\}$$

forment une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. On veut donc montrer que si l'on a

$$af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = a + b\cos(x) + c\sin(x) = 0\,, \qquad (\forall x \in \mathbb{R})\,,$$

alors $a = b = c = 0$. On va prendre différentes valeurs de x. Pour $x = 0$, on obtient que $a + b = 0$. Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient que $a + c = 0$. Pour $x = \pi$, on obtient que $a - b = 0$. Ainsi, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ a + c &= 0 \\ a - b &= 0 \end{cases}$$

En additionnant la première et troisième ligne, on obtient que $a = 0$, et cela implique facilement que $a = b = c = 0$.

Le cas des fonctions

$$\{g_1(x) = 1\,, g_2 = \cos^2(x)\,, g_3 = \sin^2(x)\}$$

est différent. En effet, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g_2(x) + g_3(x) + (-1)g_1(x) = 0\,,$$

et donc la famille de fonctions $\{g_1\,, g_2\,, g_3\}$ n'est pas une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

2. Soient $P_1\,, P_2$ et P_3 les polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ donnés par $P_1(X) = a + 4\,X + X^2\,, P_2(X) = 1 + X$ et $P_3(X) = X^2$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Soit $P(X) = a_1 + b_1\,X + c_1\,X^2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Existe-t-il $\alpha\,, \beta\,, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}$, ce qui est équivalent à dire

$$a_1 + b_1\,X + c_1\,X^2 = (\alpha a + \beta) + (4\alpha + \beta)\,X + (\alpha + \gamma)\,X^2\;.$$

On cherche donc à savoir si le système suivant a une solution

$$\begin{cases} a\alpha + \beta &= a_1 \\ 4\alpha + \beta &= b_1 \\ \alpha + \gamma &= c_1 \end{cases}$$

ce qui se réécrit, sous forme matricielle, comme suit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a_1 \\ 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & c_1 \end{array}\right)$$

Supposons que $a = 0$. On obtient le système

$$\begin{cases} \beta &= a_1 \\ 4\alpha + \beta &= b_1 \\ \alpha + \gamma &= c_1 \end{cases}$$

i.e. $\beta = a_1$, $\alpha = \frac{b_1-a_1}{4}$ et $\gamma = \frac{4c_1-b_1+a_1}{4}$. Dans le cas $a = 0$, la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
Supposons à présent $a \neq 0$. On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a_1 \\ 4 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 0 & 1 & c_1 \end{array}\right)$$

$$\color{red}{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{a}L_1} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & \frac{a-4}{a} & 0 & b_1 - \frac{4a_1}{a} \\ 1 & 0 & 1 & c_1 \end{array}\right)$$

En particulier, si $a - 4 = 0$, i.e. $a = 4$, la deuxième ligne nous donne une incompatibilité, et donc si $a = 4$, $\{P_1, P_2, P_3\}$ n'est pas une famille génératrice.
Supposons alors $a \neq 4$. On continue notre algorithme.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & \frac{a-4}{a} & 0 & b_1 - \frac{4a_1}{a} \\ 1 & 0 & 1 & c_1 \end{array}\right)$$

$$\color{red}{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{a}L_1} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & \frac{a-4}{a} & 0 & b_1 - \frac{4a_1}{a} \\ 0 & -\frac{1}{a} & 1 & c_1 - \frac{a_1}{a} \end{array}\right)$$

$$\color{red}{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{a-4}L_2} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & \frac{a-4}{a} & 0 & b_1 - \frac{4a_1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & c_1 - \frac{a_1}{a} + \frac{1}{a-4}\left(b_1 - \frac{4a_1}{a}\right) \end{array}\right)$$

$$\color{red}{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{a}{a-4}L_2} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{a} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & a_1 - \frac{a}{a-4}\left(b_1 - \frac{4a_1}{a}\right) \\ \color{red}{0} & \boxed{\frac{a-4}{a}} & \color{red}{0} & b_1 - \frac{4a_1}{a} \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \boxed{1} & c_1 - \frac{a_1}{a} + \frac{1}{a-4}\left(b_1 - \frac{4a_1}{a}\right) \end{array}\right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{1}{a}\left(a_1 - \frac{a}{a-4}\left(b_1 - \frac{4a_1}{a}\right)\right), \quad \beta = \frac{a}{a-4}\left(b_1 - \frac{4a_1}{a}\right), \quad \gamma = c_1 - \frac{a_1}{a} + \frac{1}{a-4}\left(b_1 - \frac{4a_1}{a}\right).$$

Ainsi, si $a \neq 4$, la famille $\{P_1, P_2, P_3\}$ est génératrice.

3. Montrons que les polynômes $P_1(X) = X^2 - 2X + 1$, $P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^2 + 2X + 1$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, i.e. pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, il existe des scalaires $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $X \in \mathbb{R}$, on a $P(X) = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X)$.
Soit $P(X) = a + bX + cX^2$. On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = \alpha P_1(X) + \beta P_2(X) + \gamma P_3(X)$, i.e.
$$a + bX + cX^2 = (\alpha + \gamma) + (-2\alpha + 2\gamma)X + (\alpha + \beta + \gamma)X^2, \qquad (\forall X \in \mathbb{R}).$$
On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma & = a \\ -2\alpha + 2\gamma & = b \\ \alpha + \beta + \gamma & = c \end{cases}$$

ce qui se réécrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ -2 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss. On a

$$\begin{array}{rl}
& \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ -2 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \\
\color{red}{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4 & b+2a \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \\
\color{red}{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 4 & b+2a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \end{array}\right) \\
\color{red}{L_2 \leftrightarrow L_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 4 & b+2a \end{array}\right) \\
\color{red}{L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{b+2a}{4} \end{array}\right) \\
\color{red}{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \frac{2a-b}{4} \\ \color{red}{0} & \boxed{1} & \color{red}{0} & c-a \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \boxed{1} & \frac{b+2a}{4} \end{array}\right)
\end{array}$$

Ainsi, pour tout $P(X) = a + bX + cX^2$, on a

$$P(X) = \frac{2a-b}{4}P_1(X) + (c-a)P_2(X) + \frac{b+2a}{4}P_3(X), \qquad (X \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Ainsi, P est combinaison linéaire des polynômes P_1, P_2 et P_3 et donc $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
On voit d'ailleurs facilement que cette famille est libre. La décomposition de P donnée dans (1) est unique. Ainsi, l'unique décomposition du polynôme nul $\mathbf{0}$ (i.e. $a = b = c = 0$) en fonction de P_1, P_2 et P_3 est

$$\mathbf{0} = 0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + 0 \cdot P_3,$$

et donc $\{P_1, P_2, P_3\}$ forme une famille libre.

Exercice 6

1. Soient v_1, v_2, v_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Montrons que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \mathbf{0}$. On a alors

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3 = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

et on obtient donc le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 3a + c & = 0 \\ 7b & = 0 \\ 5a + 3c & = 0 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on obtient que $b = 0$. De la première équation, on obtient que $c = -3a$, et en remplaçant c par sa valeur dans la troisième équation, on obtient que $-4a = 0$, i.e. $a = 0$. Ainsi, puisque $3a + c = 0$, on obtient que $c = 0$, et donc $a = b = c = 0$. Finalement, $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Montrons à présent que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$. Pour cela, on montre que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, il existe des scalaires $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = av_1 + bv_2 + cv_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + c \\ 7b \\ 5a + 3c \end{pmatrix},$$

et on obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} 3a + c & = x \\ 7b & = y \\ 5a + 3c & = z \end{cases}$$

(notons ici que les "variables" que l'on cherche sont a, b et c). Cela se réécrit donc sous forme matricielle comme suit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & x \\ 0 & 7 & 0 & y \\ 5 & 0 & 3 & z \end{array}\right).$$

On applique la méthode du pivot. On a :

$$\begin{array}{rc} & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & x \\ 0 & 7 & 0 & y \\ 5 & 0 & 3 & z \end{array}\right) \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & x \\ 0 & 7 & 0 & y \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & z - \frac{5}{3}x \end{array}\right) \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{3}{4}L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}z \\ 0 & 7 & 0 & y \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & z - \frac{5}{3}x \end{array}\right) \end{array}$$

$$\mathrm{L}_1 \leftarrow \frac{1}{3}\mathrm{L}_1\,, \mathrm{L}_2 \leftarrow \frac{1}{7}\mathrm{L}_2\,, \mathrm{L}_3 \leftarrow \frac{3}{4}\mathrm{L}_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}z \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{y}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{4}z - \frac{5}{4}x \end{array}\right)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}z\right)\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{y}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4}z - \frac{5}{4}x\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$.

2. Soient w_1, w_2, w_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que la famille $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $aw_1 + bw_2 + cw_3 = \mathbf{0}$. On a alors

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aw_1 + bw_2 + cw_3 = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient donc le système linéaire suivant

$$\begin{cases} b + c &= 0 \\ a + c &= 0 \\ a + b &= 0 \end{cases}$$

De la deuxième et troisiéme èquation, on obtient que $a + c = a + b$, i.e. $b = c$. En remplaçant dans la première équation, on obtient que $2b = 0$, i.e. $b = 0$. Ainsi, $c = 0$ et donc, en utilisant la deuxiḿe équation, on obtient que $a = 0$. Finalement, $\{w_1, w_2, w_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Montrons à présent que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2, w_3\}$. Pour cela, on montre que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, il existe des scalaires $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = aw_1 + bw_2 + cw_3$. i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + c \\ a + c \\ a + b \end{pmatrix},$$

et on obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} b + c &= x \\ a + c &= y \\ a + b &= z \end{cases}$$

(notons ici que les "variables" que l'on cherche sont a, b et c). Cela se réécrit donc sous forme matricielle comme suit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right).$$

On applique la méthode du pivot. On a :

$$\begin{array}{rl}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \\
L_1 \leftrightarrow L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & z \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & 1 & y-z \\ 0 & 1 & 1 & x \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & 1 & y-z \\ 0 & 0 & 2 & x+y-z \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow (-1) \cdot L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & -1 & z-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x+y-z}{2} \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x+y-z}{2} \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{y-x+z}{2} \\ 0 & 1 & -1 & z-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x+y-z}{2} \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow L_2 + L_3 & \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{y-x+z}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{z+x-y}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{x+y-z}{2} \end{array}\right)
\end{array}$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{y-x+z}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{z+x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x+y-z}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$