MAT 1741 - DGD 2 - Espaces Vectoriels

Exercice 1

Soit $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les puissances de A_1 suivantes : A_1^2, A_1^3, A_1^4 et A_1^5.
2. Que pouvez-vous dire concernant A_1^n ? En déduire une valeur de A_1^{2018}.

Même question avec la matrice A_2 donnée par

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^*).$$

Exercice 2

Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit une addition $+ : \mathscr{F}(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ et $\cdot : \mathbb{R} \times \mathscr{F}(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R})$ par

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad (x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}, f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R})).$$

Lesquels des sous-ensembles suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$?

1. $U_1 := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(0) = 0\}$,
2. $U_2 := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(0) = 1\}$,
3. $U_3 := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$,
4. $U_4 := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$,
5. $U_5 := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3

Soit $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ l'ensemble des matrices à coefficients réels, i.e.

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lesquels des sous-ensembles suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$?

1. $U_1 := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2), b = c \right\}$,
2. $U_2 := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2), a = -d \right\}$,
3. $U_3 := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2), ad = 0 \right\}$,
4. $U_4 := \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2), ad - bc = 0 \right\}$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note par $\deg(P)$ le degré de P, i.e.

$$\deg(a_0 + a_1 X + a_2 X_2 + \ldots + a_n X^n) = n\,, \qquad (a_n \neq 0)\,.$$

On sait que $(\mathbb{R}[X]\,,+\,,\cdot)$ est un espace vectoriel avec l'addition et multiplication standard. Lesquels des sous-ensembles suivant est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

1. $U_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, \deg(P) = 2\}\,,$
2. $U_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, \deg(P) \leqslant 3\}\,,$
3. $U_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, P(1) = 0\}\,,$
4. $U_4 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, P(1) + P(-1) = 0\}\,,$
5. $U_5 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, P(1)P(2) = 0\}\,,$

Exercice 5

1. Soit $V_1 = \mathbb{R}^2$ muni des lois $+ : V_1 \times V_1 \to V_1$ et $\cdot : \mathbb{R} \times V_1 \to V_1$ donnés par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 - 2 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}\,, \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

   Est-ce que $(V_1\,,+\,,\cdot)$ est un espace vectoriel ?

2.

3. Soit $V_2 = \mathbb{R}^3$ muni des lois $+ : V_2 \times V_2 \to V_2$ et $\cdot : \mathbb{R} \times V_2 \to V_2$ donnés par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 - 1 \end{pmatrix}\,, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda y_1 \\ \lambda z_1 - \lambda + 1 \end{pmatrix}\,, \quad (\lambda \in \mathbb{R})\,.$$

   Est-ce que $(V_2\,,+\,,\cdot)$ est un espace vectoriel ?