MAT 1741 - DGD 2 - Correction

Exercice 1

Soit A_1 la matrice de $\mathrm{Mat}(3 \times 3)$ donnée par

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A_1^2 = A_1 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^3 = A_1^2 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^4 = A_1^3 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^5 = A_1^4 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On conjecture la chose suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

On montre cela par récurrence. Cela est clair pour $n = 1$. Supposons que pour un n donné, on a que A_1^n est de la forme (1). On a alors

$$A_1^{n+1} = A_1^n \cdot A_1 = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc A_1^{n+1} est de la forme (1). Ainsi, par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$A_1^{2018} = \begin{pmatrix} (-1)^{2018} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2018 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2018 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A présent, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit A_2 la matrice donnée par

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$

On a

$$A_2^2 = A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$$

$$A_2^3 = A_2^2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix} .$$

De nouveau, on conjecture la chose suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_2^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} . \tag{2}$$

De nouveau, on montre cela par récurrence. Cela est clair pour $n = 1$. Supposons que pour un n donné, on a que A_2^n est de la forme (2). On a alors

$$A_2^{n+1} = A_2^n \cdot A_2 = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix},$$

et donc A_2^{n+1} est de la forme (2). Ainsi, par récurrence, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_2^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} .$$

Ainsi,

$$A_2^{2018} = \begin{pmatrix} \lambda^{2018} & 2018\lambda^{2017} \\ 0 & \lambda^{2018} \end{pmatrix} .$$

Exercice 2

Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cet espace est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou l'addition et la multiplication sont données par

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad (f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}).$$

On va noter par $\mathbf{0}$ la fonction nulle de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$, i.e. la fonction définie par

$$\mathbf{0}(x) = 0, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

1. Soit $U_1 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(0) = 0\}$. Clairement, on a $\mathbf{0} \in U_1$ car $\mathbf{0}(0) = 0$. Soient $f, g \in U_1$ (i.e. $f(0) = g(0) = 0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0, \quad (\lambda \cdot f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \times 0 = 0,$$

   i.e. $f + g$ et $\lambda \cdot f$ appartiennent à U_1. Ainsi, U_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.
2. Soit $U_2 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(0) = 1\}$. On voit facilement que $\mathbf{0}$ n'appartient pas à U_2. En effet, $\mathbf{0}(0) = 0 \neq 1$. Ainsi, $\mathbf{0} \notin U_2$ et donc U_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

3. Soit $U_3 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(x) = f(-x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$: c'est l'ensemble des **fonctions paires**. Tout d'abord, on voit que $\mathbf{0} \in U_3$ car $0 = \mathbf{0}(x) = \mathbf{0}(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. A présent, soient $f, g \in U_3$ (i.e. $f(x) = f(-x)$ et $g(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = (\lambda \cdot f)(x),$$

   et donc $f + g$ et $\lambda \cdot f$ appartiennent a U_3. Finalement, U_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.
4. Soit $U_4 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(-x) = -f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$: c'est l'ensemble des **fonctions impaires**. Tout d'abord, on voit que $\mathbf{0} \in U_4$ car $0 = -\mathbf{0}(x) = \mathbf{0}(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. A présent, soient $f, g \in U_4$ (i.e. $-f(x) = f(-x)$ et $-g(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x),$$

$$(\lambda \cdot f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) = -(\lambda \cdot f)(x),$$

   et donc $f + g$ et $\lambda \cdot f$ appartiennent à U_4. Finalement, U_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.
5. Soit $U_5 = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}), f(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$. Soient f une fonction non nulle de U_5. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$. Ainsi, $-f(x) < 0$. Or $-f(x) = ((-1) \cdot f)(x)$, et donc $((-1) \cdot f)(x) < 0$. Ainsi, $(-1) \cdot f$ n'appartient pas à U_5, et donc U_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

Remarque 0.0.1. 1. Comme dit précédemment, les espaces U_3 et U_4 correspondent respectivement à l'ensemble des fonctions paires et impaires. Ces fonctions semblent "peu nombreuses", mais on peut facilement voir que toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Ainsi, pour tout $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$, on a

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{=H_f(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{=G_f(x)}$$

   et on voit facilement que $H_f \in U_3$ et $G_f \in U_4$. De plus, on voit facilement que $U_3 \cap U_4 = \{\mathbf{0}\}$.

2. Pour l'espace U_5, on a vu que cet espace n'était pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$. Or, on voit facilement que $\mathbf{0} \in U_5$ et que la somme de deux fonctions de U_5 est toujours un élément de U_5.

Exercice 3

Soit $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ l'ensemble des matrices à coefficients réels , i.e.

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notons par $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$, i.e.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathrm{U}_1 := \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)\,, b = c \right\}$. En particulier, on a

$$\mathrm{U}_1 = \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\,, a\,, b\,, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Clairement, $\mathbf{0} \in \mathrm{U}_1$. A présent, soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix}$ deux matrices de U_1 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \mathrm{A} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda d_1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et $\lambda \cdot \mathrm{A}$ appartiennent à U_1. Ainsi, U_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

2. Soit $\mathrm{U}_2 := \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)\,, a = -d \right\}$. En particulier, on a

$$\mathrm{U}_2 = \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\,, a\,, b\,, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Clairement, $\mathbf{0} \in \mathrm{U}_2$. A présent, soient $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix}$ deux matrices de U_2 et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \mathrm{A} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ c_1 & -\lambda a_1 \end{pmatrix}$$

i.e. $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et $\lambda \cdot \mathrm{A}$ appartiennent à U_2. Ainsi, U_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

3. Soit $\mathrm{U}_3 := \left\{ \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)\,, ad = 0 \right\}$. En particulier, on a

$$\mathrm{U}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\,, a\,, b\,, c \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\,, b\,, c \in \mathbb{R}\,, d \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Soient A et B les deux matrices de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$ données par

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc que $\mathrm{A}\,, \mathrm{B} \in \mathrm{U}_3$. Or, on a

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et donc $\mathrm{A} + \mathrm{B} \notin \mathrm{U}_3$. Ainsi, U_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

4. Soit $U_4 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , ad - bc = 0 \right\}$. On utilise les matrices A et B du point précédent. On voit facilement que A et B appartiennent à U_4. Or, $A + B \notin U_4$. Ainsi, de nouveau, U_4 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(2 \times 2)$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels (en particulier, $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathscr{F}(\mathbb{R})$). Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note par $\deg(P)$ le degré de P, i.e.

$$\deg(a_0 + a_1 X + a_2 X_2 + \ldots + a_n X^n) = n\,, \qquad (a_n \neq 0)\,.$$

On note par $\mathbf{0}$ le polynôme nul de $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $U_1 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, \deg(P) = 2\}$. Ainsi, on a

$$U_1 = \left\{ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \,, a_0\,, a_1 \in \mathbb{R}\,, a_2 \in \mathbb{R}^* \right\}\,.$$

On voit facilement que $\mathbf{0} \notin U_1$, et ainsi, U_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $U_2 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, \deg(P) \leqslant 3\}$. Ainsi, on a

$$U_2 = \left\{ P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \,, a_0\,, a_1\,, a_2\,, a_3 \in \mathbb{R} \right\}\,.$$

Tout d'abord, $\mathbf{0} \in U_2$ (il correspond aux polynômes donné par $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$). Soient P et Q les polynômes donnés par $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (P+Q)(X) &= \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3\right) + \left(b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3\right) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) X + (a_2 + b_2) X^2 + (a_3 + b_3) X^3\,, \end{aligned}$$

$$\lambda \cdot P(X) = \lambda \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3\right) = \lambda a_0 + (\lambda a_1) X + (\lambda a_2) X^2 + (\lambda a_3) X^3\,,$$

i.e. $P + Q$ et $\lambda \cdot P$ appartiennent à U_2. Ainsi, U_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

3. Soit $U_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, P(1) = 0\}$. Tout d'abord, on voit facilement que $\mathbf{0} \in U_3$ car $\mathbf{0}(1) = 0$. De plus, pour $P\,, Q \in U_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(P+Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0 + 0 = 0\,, \quad (\lambda \cdot P)(1) = \lambda P(1) = 0\,,$$

i.e. $P + Q$ et $\lambda \cdot P$ appartiennent à U_3. Finalement, U_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4. Soit $U_4 = \{P \in \mathbb{R}[X]\,, P(1) + P(-1) = 0\}$. On voit que $\mathbf{0} \in U_4$. En effet, $\mathbf{0}(1) + \mathbf{0}(-1) = 0 + 0 = 0$. De même, pour tous $P\,, Q \in U_4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} (P+Q)(1) + (P+Q)(-1) &= P(1) + Q(1) + P(-1) + Q(-1) \\ &= \underbrace{P(1) + P(-1)}_{=0} + \underbrace{Q(1) + Q(-1)}_{=0} = 0 + 0 = 0\,, \end{aligned}$$

$$(\lambda \cdot P)(1) + (\lambda \cdot P)(-1) = \lambda P(1) + \lambda P(-1) = \lambda \underbrace{(P(1) + P(-1))}_{=0} = 0\,,$$

i.e. $P + Q$ et $\lambda \cdot P$ appartiennent à U_4. Ainsi, U_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

5. Soit $U_5 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1)P(2) = 0\}$. Clairement, $\mathbf{0} \in U_5$ car $\mathbf{0}(1)\mathbf{0}(2) = 0$. A présent, soient $P, Q \in U_5$. On a alors $P(1)P(2) = Q(1)Q(2) = 0$. On a

$$\begin{aligned}
(P+Q)(1)(P+Q)(2) &= (P(1)+Q(1))(P(2)+Q(2)) \\
&= \underbrace{P(1)P(2)}_{=0} + P(1)Q(2) + Q(1)P(2) + \underbrace{Q(1)Q(2)}_{=0} \\
&= P(1)Q(2) + Q(1)P(2)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(P+Q)(1)(P+Q)(2) = P(1)Q(2)+Q(1)P(2)$, et la quantité $P(1)Q(2)+Q(1)P(2)$ n'est pas nécessairement nul. Voyons cela sur des exemples. Soient P et Q les polynômes donnés par $P(X) = X - 1$ et $Q(X) = X - 2$. On a $P(1) = Q(2) = 0$, et donc $P(1)P(2) = Q(1)Q(2) = 0$, i.e. $P, Q \in U_5$. On $(P+Q)(X) = (X-1) + (X-2) = 2X - 3$ et on a $(P+Q)(1) = -1$ et $(P+Q)(2) = 1$.

Ainsi, en général, la somme de deux polynômes de U_5 n'est pas dans U_5, et donc U_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.