

MAT 1741 - DGD 1 - Algorithme de Gauss

Exercice 1

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$$

1. Trouver la matrice augmentée du système et la matrice des coefficients.
2. Appliquer l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée pour obtenir une matrice échelonnée.
3. Déterminer le rang de la matrice A associée au système et le rang de la matrice augmentée $[A|b]$.
4. En utilisant la question précédente, en déduire le nombre de solutions du système linéaire, et déterminer l'ensemble des solutions.

Mêmes questions pour le système linéaire \mathcal{S}_2 et \mathcal{S}_3 donnés par

$$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = 0 \\ -1x_1 + 3x_2 + 3x_3 & = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 & = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit \mathcal{S} le système linéaire donné par :

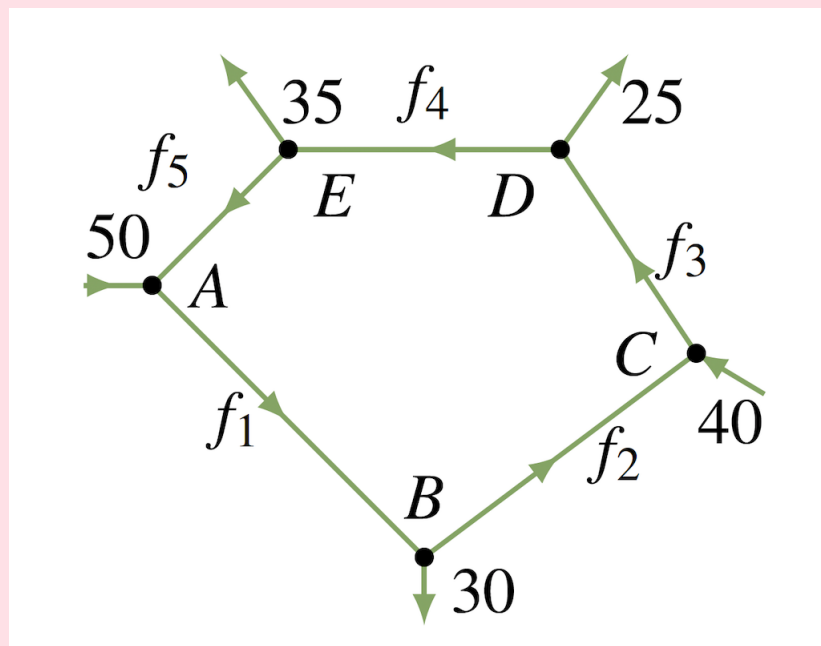
$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = -1 \\ 2x_1 - x_2 & = 2 \\ x_2 + 2x_3 & = -4 \\ ax_1 + bx_2 + ax_3 & = 0 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles ce système a :

1. aucune solution ,
2. une unique solution ,
3. une infinité de solutions .

Exercice 3

Soit le circuit automobile donné par le schéma suivant :



1. Quelles sont les valeurs possibles pour f_1 , f_2 , f_3 , f_4 et f_5 ? En utilisant que les flux f_i sont positifs, donner des conditions sur les paramètres obtenus.
2. Imaginons qu'en raison d'un concert de Drake, les autorités locales décident de fermer la route AB pour faciliter la mise en place du dispositif de sécurité. Est-ce que cela causera une congestion du trafic? Même question avec EA.

Exercice 4

Trouvez les valeurs de a , b et c tel que la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

soit sous forme échelonnée. Même question pour échelonnée réduite.

Exercice 5

Soient A et B les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le nombre de lignes et de colonnes du produit $A \cdot B$.
2. Calculer le produit $A \cdot B$.
3. Déterminer A^t , B^t et $B^t A^t$. Comparer $(AB)^t = B^t A^t$.