MAT 1741 - DGD 1 - Correction

Exercice 1

1. La matrice A_1 associée au système et sa matrice augmentée $[A_1|b]$ sont données par

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [A_1|b] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

2. On a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow (-1)\cdot L_3\,, L_2 \leftarrow (-1)\cdot L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & 2 \end{array}\right)$$

3. On a donc $\operatorname{rang}(A_1) = \operatorname{rang}([A_1|b]) = 3$. Le système $\mathscr{S}_1$ est donc compatible. Or, puisque la matrice A_1 comporte 4 colonnes, on obtient que le système a une infinité de solutions. Plus précisément, en utilisant le forme échelonnée réduite, on obtient donc le système

$$\begin{cases} x_1 &= -x_4 + 1 \\ x_2 &= -2x_4 - 1 \\ x_3 &= 4x_4 + 2 \end{cases}$$

et donc les solutions du système $\mathscr{S}_1$ sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} -x_4+1 \\ -2x_4-1 \\ 4x_4+2 \\ x_4 \end{pmatrix}, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Regardons à présent le système $\mathscr{S}_2$. La matrice A_2 et la matrice augmentée $[\mathrm{A}_2|\mathrm{b}]$ sont données par

$$\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad [\mathrm{A}_2|\mathrm{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

On a :

$$\begin{array}{rc}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \\
\color{red}{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \\
\color{red}{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \frac{1}{2}\mathrm{L}_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ -3 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right) \\
\color{red}{\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \frac{3}{2}\mathrm{L}_1} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{13}{2} & -5 & \frac{7}{2} \end{array}\right) \\
\color{red}{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \frac{3}{2}\mathrm{L}_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -\frac{13}{2} & -5 & \frac{7}{2} \end{array}\right) \\
\color{red}{\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 - \frac{13}{2}\mathrm{L}_2} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 21 & -3 \end{array}\right) \\
\color{red}{\mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4 + \frac{21}{4}\mathrm{L}_3} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{18} \end{array}\right)
\end{array}$$

et on voit que la dernière ligne donne une incompatibilité du système. Ainsi, $\mathscr{S}_2$ n'a pas de solutions.

On regarde à présent le système $\mathscr{S}_3$. La matrice A_3 et la matrice augmentée $[A_3|b]$ sont données par

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

En particulier, à cette étape, on sait déjà que le système admet une solution (car $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: système homogène) : le vecteur nul ! On a :

$$\begin{array}{rc}
L_2 \leftarrow L_2 - L_1 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \\
L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \\
L_3 \leftarrow L_3 - L_2 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_4 \leftarrow L_4 - L_3 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\text{(On enlève } L_4\text{)} & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_2 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 + L_2 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{2}L_3 & \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)
\end{array}$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \frac{1}{2}\mathrm{L}_3 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient donc le système suivant

$$\begin{cases} x_1 & = \frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ x_2 & = \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_3 & = -x_4 \end{cases}$$

et on obtient donc que l'ensemble des solution du système $\mathscr{S}_4$ est donné par

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_5 \\ \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 \\ -x_4 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2

La matrice augmentée $[\mathrm{A}|\mathrm{b}]$ associée au système $\mathscr{S}$ est donnée par

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ a & b & a & 0 \end{array}\right).$$

On va distinguer différents cas :

1. Supposons que $a = 0$. On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = -1 \\ 2x_1 - x_2 & = 2 \\ x_2 + 2x_3 & = -4 \\ bx_2 & = 0 \end{cases}$$

Si $b \neq 0$, on obtient

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = -1 \\ 2x_1 - x_2 & = 2 \\ x_2 + 2x_3 & = -4 \\ x_2 & = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_1 + x_3 & = -1 \\ x_1 & = 1 \\ x_3 & = -2 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

et donc l'unique solution du système est le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Supposons maintenant que $b = 0$. On a alors le système suivant :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme de Gauss. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\textcolor{red}{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$\textcolor{red}{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

et on obtient donc le système

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = -1 \\ -x_2 - 2x_3 & = 4 \\ x_3 & = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_1 & = -1 \\ x_2 & = -4 \\ x_3 & = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, l'unique solution dans le cas $a = b = 0$ est le point $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Supposons à présent que $a \neq 0$. On applique alors de nouveau l'algorithme de Gauss. On a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ a & b & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\textcolor{red}{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ a & b & a & 0 \end{array}\right)$$

$$\textcolor{red}{L_4 \leftarrow L_4 - aL_1} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & b & 0 & a \end{array}\right)$$

Si $b = 0$, la dernière ligne du système nous donne que $a = 0$, ce qui est impossible car nous sommes dans le cas $a \neq 0$. Ainsi, si $b = 0$, nous n'avons pas de solutions. Supposons alors que $b \neq 0$. On contenue notre algorithme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & b & 0 & a \end{array}\right)$$

$$\textcolor{red}{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + bL_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2b & a+4b \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2bL_3 \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+4b \end{array}\right)$$

En particulier, si $a + 4b \neq 0$, alors la dernière ligne du système nous donne une contradiction, et donc pas de solution. Si $a + 4b = 0$ (i.e. $a = -4b$), alors l'unique solution est de nouveau le point $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

1. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 - f_5 &= 50 \\ f_1 - f_2 &= 30 \\ f_3 - f_2 &= 40 \\ f_3 - f_4 &= 25 \\ f_4 - f_5 &= 35 \end{cases}$$

ce qui se réécrit, sous forme matricielle, comme suit :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme de Gauss. On a

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right)$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 35 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{L}_5 \leftarrow \mathrm{L}_5 + \mathrm{L}_4 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$(\text{On enlève } \mathrm{L}_5) \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -35 \end{array}\right)$$

$$\mathrm{L}_2 \leftarrow -\mathrm{L}_2 \text{ et } \mathrm{L}_4 \leftarrow -\mathrm{L}_4 \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 35 \end{array}\right)$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} f_1 - f_5 & = 50 \\ f_2 - f_5 & = 20 \\ f_3 - f_5 & = 60 \\ f_4 - f_5 & = 35 \end{cases}$$

et on obtient alors que les solutions du système sont données par

$$\left\{ \begin{pmatrix} f_5 + 50 \\ f_5 + 20 \\ f_5 + 60 \\ f_5 + 35 \\ f_5 \end{pmatrix}, f_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Si la route AB est fermée, alors les 50 voitures entrant dans le circuit vont se retrouver bloquées. On aura donc une congestion du traffic.

Exercice 4

Intéressons-nous d'abord aux paramètres a, b et c tels que la matrice soit sous forme échelonnée. On voit tout d'abord que la valeur de a ne joue pas de rôle. En effet, si $a \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{a}} & 1 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est un pivot. Si $a = 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est un pivot, peu importe les valeurs de b et c. De même, peu importe la valeur de a, b et c,

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est un pivot. Ainsi, pour tous a, b et c, on voit que la matrice est sous forme échelonnée, dont le rang est 2 si $c = 0$ et 3 si $c \neq 0$.
Regardons à présent les paramètres pour lesquels la matrice est sous forme échelonnée réduite. Commençons par a.

— Si $a = 0$, alors on a (au moins) deux pivots :

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Puisque tout coefficient au dessus d'un pivot doit être nul, on obtient que $b = 0$. On a alors deux cas :

— $c = 0$: on a alors deux pivots et donc la matrice échelonnée réduite est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— Si $c \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\mathrm{c}} \end{pmatrix}$$

est un pivot. Or, le coefficient au dessus de $\boxed{\mathrm{c}}$ est non nul, et donc la matrice n'est pas sous forme échelonnée réduite.

— Si $a \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{a}} & 1 & b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

est un pivot et donc, pour être échelonnée réduite, on doit avoir $a = 1$. De la même manière, on obtient que la matrice est sous forme échelonnée réduite si et seulement si $b = c = 0$

Exercice 5

1. On a $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}(4 \times 4)$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{Mat}(4 \times 3)$. Ainsi, cela a un sens de considérer le produit $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$, et ce produit sera une matrice de $\mathrm{Mat}(4 \times 3)$.

2. On a

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 17 & 3 \\ 7 & 17 & -9 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. On a $A \in \mathrm{Mat}(4 \times 4)$ et $B \in \mathrm{Mat}(4 \times 3)$. Ainsi, $A^t \in \mathrm{Mat}(4 \times 4)$ et $B^t \in \mathrm{Mat}(3 \times 4)$. Ainsi, cela a un sens de considérer le produit $B^t \cdot A^t$ et on a $B^t \cdot A^t \in \mathrm{Mat}(3 \times 4)$. Plus précisément, on a

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 17 & 17 & 8 \\ -2 & 3 & -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

De même, on a $A \cdot B \in \mathrm{Mat}(4 \times 3)$ et donc $(A \cdot B)^t \in \mathrm{Mat}(3 \times 4)$. Finalement,

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 17 & 3 \\ 7 & 17 & -9 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 & 0 \\ 3 & 17 & 17 & 8 \\ -2 & 3 & -9 & 9 \end{pmatrix},$$

i.e. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.