

## Feuille 4 : Intervalles de confiance

Allan Merino

Master 1 Mathématiques, UE Statistiques, Février 2016

---

### Exercice 1

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de loi  $\mathbb{P}_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Trouver des fonctions pivotaux et ensuite déduire des intervalles de confiance de niveau  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\theta$  dans les cas suivants :

1.  $\Theta = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(\theta, 1)$  (loi normale avec variance connue),
2.  $\Theta = \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  (loi normale avec espérance connue),
3.  $\Theta = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$  (loi normale avec variance inconnue),
4.  $\Theta = \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  (loi normale avec espérance inconnue).

Et si l'on s'intéresse au couple  $(\mu, \sigma^2)$  directement ?

### Exercice 2

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de loi  $\mathbb{P}_\theta$ ,  $\theta \in \Theta$ . Trouver des intervalles de confiance asymptotiques de niveau  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\theta$  dans les cas suivants :

1.  $\Theta = [0, 1]$  et  $\mathbb{P}_\theta = \text{Ber}(\theta)$  (loi de Bernouilli),
2.  $\Theta = \mathbb{R}^+$  et  $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{P}(\theta)$  (loi de Poisson),
3.  $\Theta = \mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([0, \theta])$  (loi uniforme).

### Exercice 3

Une entreprise qui produit des lecteurs DVD de salon fait un sondage pour estimer la proportion  $p$  de ménages possesseurs d'un appareil. Sur un échantillon de 400 ménages, 300 possèdent un lecteur. On suppose les observations indépendantes et identiquement distribuées.

1. Donner une structure statistique adaptée et estimer ponctuellement  $p$ .
2. Construire un intervalle de confiance pour  $p$  de niveau de confiance 95%.
3. Quelle est la précision obtenue, en pourcentage, pour cette estimation ?
4. Quelle est la taille minimum de l'échantillon pour que l'erreur commise sur  $p$  ne dépasse pas 3% ? 1 % ?

### Exercice 4

On considère  $X$  une variable aléatoire continue de densité :

$$f_{\theta}(x) = \frac{\theta}{1-\theta} x^{\frac{2\theta-1}{1-\theta}} \mathbb{1}_{0 < x < 1} \quad (\theta \in ]\frac{1}{2}, 1[).$$

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon pour cette variable aléatoire.

1. Donner une structure statistique adaptée.
2. Calculer l'espérance et la variance de  $X$ .
3. Trouver un estimateur de  $\theta$  par la méthode des moments (et un estimateur du maximum de vraisemblance).
4. Etudier leur biais, leur convergence (faible, forte, en moyenne quadratique).
5. Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\theta$ .

### Exercice 5

Soit  $\Theta = \mathbb{R}$  et soit, pour  $\theta \in \Theta$ , la loi  $\mathbb{P}_{\theta}$  sur  $\mathbb{R}$  donnée par sa densité :

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit de plus  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -échantillon de loi  $(\mathbb{P}_{\theta})_{\theta \in \Theta}$ .

1. Calculer le premier moment d'une variable aléatoire  $X$  de loi  $\mathbb{P}_{\theta}$  et en déduire un estimateur sans biais et faiblement convergent de  $\theta$  pour un échantillon de taille  $n$ .
2. En utilisant le TLC, construire un intervalle de confiance approximatif de niveau 0,988 pour le paramètre  $\theta$  dans le cas  $n = 10000$ .

### Exercice 6

Lors d'un sondage électoral, on interroge 1000 électeurs : 52% de ces électeurs interrogés affirment qu'ils voteront pour le candidat  $A$ . On note  $\pi_A$  la proportion des électeurs qui vote pour le candidat  $A$  dans la population (la population est de taille  $N = 20000000$ ).

1. Donner un intervalle de confiance de la proportion  $\pi_A$ . Peut-on en déduire la victoire du candidat  $A$  avec un niveau de confiance de 95% ?
2. Quel effectif serait suffisant pour annoncer la victoire du candidat recueillant 52% des voix au seuil 5% ?
3. Même question si l'on s'intéresse à des élections municipales où le nombre d'électeurs est de 100000.