

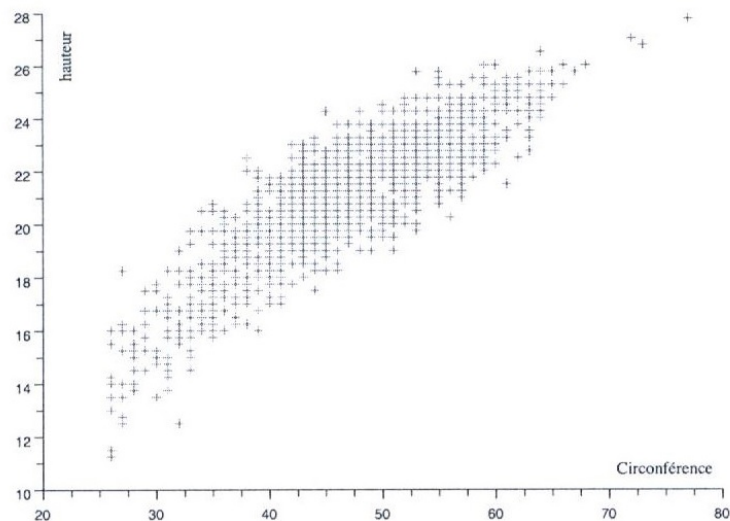
Feuille 7 : Rappels et Compléments

Allan Merino

DUT Mesures Physiques, Metz - Mars 2016

Exercice 1

On souhaite expliquer la hauteur y (en mètres) d'un arbre en fonction de sa circonférence x (en centimètres) à 1m30 du sol. On a relevé $n = 1429$ couples (x_i, y_i) , le nuage de points étant représenté ci-dessous.



On a obtenu $(\bar{x}, \bar{y}) = (47, 3; 21, 2)$ et

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 102924 \quad \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 8857 \quad \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 26466$$

1. Calculer la droite des moindres carrés pour le modèle $y = \beta_1 + \beta_2 x + \varepsilon$. et la représenter sur la figure précédente.
2. Calculer le coefficient de détermination R^2 . Commenter la qualité de l'ajustement des données au modèle.
3. Avec ces estimateurs, la somme des carrés des résidus vaut alors $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = 2052$. Si on suppose les perturbations ε_i gaussiennes, centrées, indépendantes et de même variance σ^2 , en déduire un estimateur $\hat{\sigma}^2$ de σ^2 .
4. Donner un estimateur $\hat{\sigma}_1^2$ de la variance de $\hat{\beta}_1$.

5. Tester l'hypothèse $H_0 : \beta_1 = 0$ contre $H_1 : \beta_1 \neq 0$.

Exercice 2

En mesurant un temps de réaction, un psychologue estime que l'écart-type est de 0,05 seconde. Quelle doit être la taille de son échantillon de mesures pour que l'erreur de son estimation n'excède pas 0,01 secondes à 95 pourcent ? Même question avec 99 pourcent.

Exercice 3

La législation en vigueur impose aux aéroports une intensité maximum de bruit égale à 80 décibels au décollage et à l'atterrissage des avions. Au-delà de cette limite, l'aéroport doit indemniser les riverains. On admet que la variable X dont les valeurs représentent l'intensité du bruit causé par un avion d'un certain type obéit à un loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Les habitants d'un village proche de l'aéroport assurent que la limite de 80 décibels est dépassée en moyenne et demandant une expertise. On décide de faire au seuil 1 pourcent le test :

$$H_0 : m = 80 \qquad H_1 : m < 80.$$

On suppose que σ est connu et égal à 7.

1. Montrer que le test préserve les intérêts des riverains, le risque d'autoriser à voler des avions trop bruyants étant maîtrisé. Préciser à quoi correspond le risque de type II.
2. On enregistre atterrissages-décollages sur un échantillon de 40 avions du type considéré. Sous l'hypothèse H_0 , quelle est la loi de \bar{X} ? Déterminer la région d'acceptation de H_0 au seuil de 1 pourcent. Préciser la règle de décision du test.
3. La compagnie commercialisant ce type d'avions affirme que l'intensité moyenne du bruit occasionné par ces avions est de 78 décibels (avec un écart-type de 7). Si cette affirmation est vraie, quelle est la probabilité, pour l'aéroport, de verser à tort des indemnités aux riverains à la suite du test ?
4. L'échantillon de 40 enregistrements a donné une intensité moyenne de 79 décibels. Quelle est la conclusion du test au seuil de 1 pourcents ?
5. Quel doit être le nombre minimal d'enregistrement à effectuer pour que, dans ce test, les risques soient les suivants :
 - (a) les riverains ne perçoivent pas l'indemnité qui leur est due, avec une probabilité au plus égale à 0,01.
 - (b) la vraie valeur de m est bien de 78 décibels comme l'affirme la compagnie, et l'aéroport verse (à tort) des indemnités aux riverains avec une probabilité au plus égale à 0,05.

Exercice 4

Dans ses expériences avec des pois, Mendel a observé 315 pois ronds et jaunes, 108 pois ronds et verts, 101 pois ridés et jaunes, et 32 pois ridés et verts. Selon sa loi de l'hérédité, ces nombres devraient être proportionnels respectivement à 9, 3, 3 et 1. Peut-on douter de cette loi aux seuils respectifs de 0,01 et 0,05 ?