

Feuille 2 : Intervalles de confiance et tests d'hypothèses

Allan Merino

DUT Mesures Physiques, Metz - Février 2016

Exercice 1

Des mesures du diamètre apparent vertical de la planète Vénus ont donné, en secondes d'arc, les résultats suivants :

42.7–43.01–42.76–43.63–41.6–42.95–43.18–43.1–42.56–43.48–43.06–42.87–42.78–43.2–43.39

Soit X la variable représentant, non pas le diamètre apparent vertical de Vénus, qui lui, est ce qu'il est, mais les résultats d'une mesure de cette grandeur rendue aléatoire par le fait que de nombreux phénomènes annexes interviennent dans la pratique de cette mesure. Compte tenu du grand nombre de causes diverses d'erreur de mesure, il est raisonnable de considérer que X suit une répartition normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Donner un intervalle de confiance pour m d'après l'échantillon de mesure obtenu, au seuil 0.05 et en supposant que $\sigma = 0.5$.
2. Combien de mesures faudrait-il avoir au minimum, pour obtenir, à ce même seuil, un intervalle de confiance pour m de longueur maximale 0.1 ?

Exercice 2

Dans la fabrication de comprimés effervescents, il est prévu que chaque comprimé doit contenir 1625 mg de bicarbonate de sodium. Afin de contrôler la fabrication de ces médicaments, on a prélevé un échantillon de 150 comprimés et on a mesuré la quantité de bicarbonate de sodium pour chacun d'eux. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau ci-contre :

Classes	[1610; 1615[[1615; 1620[[1620; 1625[[1625; 1630[[1630; 1635[
Effectifs	7	8	42	75	18

1. Donner des estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart-type σ de la quantité de bicarbonate de sodium dans la population.
2. Dans cette question, on prendra pour valeur de σ , son estimation trouvée dans la question 1. On appelle \bar{X} la variable qui, à tout échantillon de taille $n = 150$, associe la quantité moyenne de bicarbonate de sodium de cet échantillon.
 - (a) \bar{X} peut-elle être approchée par une loi classique ? Si oui, laquelle ? Donner ses paramètres.

- (b) Déterminer un intervalle de confiance de la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population avec le coefficient de confiance 95 pourcent. Calculer l'amplitude de cet intervalle et interpréter le résultat.
- (c) Quelle devrait être la taille minimale de l'échantillon prélevé pour connaître avec le coefficient de confiance 95 pourcent la quantité moyenne de bicarbonate de sodium dans la population à 1 mg près.

Exercice 3

Soit $p \in \Theta = [0, 1]$ et (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi $\mathcal{B}(1, p)$. Posons $F_n = \bar{X}_n$

1. Montrer que $0 \leq \sqrt{p(1-p)} \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que

$$\left[F_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}; F_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}} \right]$$

est un intervalle de confiance approximatif de niveau au moins $1 - \alpha$ de p (où $\alpha \in]0, 1[$ et où z_p est le p -quantile de la loi normale centrée réduite).

Exercice 4

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta$. Trouver des intervalles de confiance asymptotiques de niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre θ dans les cas suivants :

1. $\mathbb{P}_\theta = \text{Ber}(\theta)$ (loi de Bernoulli) avec $\theta \in \Theta = [0, 1]$,
2. $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{P}(\theta)$ (loi de Poisson) avec $\theta \in \Theta = \mathbb{R}^+$,
3. $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([0, \theta])$ (loi uniforme) avec $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -échantillon de loi $\mathcal{N}(0, \sigma)$. Trouver un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour le paramètre σ .

Exercice 6

Lors d'un sondage électoral, on interroge 1000 électeurs : 52% de ces électeurs interrogés affirment qu'ils voteront pour le candidat A. On note π_A la proportion des électeurs qui vote pour le candidat A dans la population (la population est de taille $N = 20000000$).

1. Donner un intervalle de confiance de la proportion π_A . Peut-on en déduire la victoire du candidat A avec un niveau de confiance de 95% ?
2. Quel effectif serait suffisant pour annoncer la victoire du candidat recueillant 52% des voix au seuil 5% ?
3. Même question si l'on s'intéresse à des élections municipales où le nombre d'électeurs est de 100000.