# Loi normale, estimation et intervalle de confiance

Allan Merino

DUT Mesures Physiques, Metz - Février 2016

---

## Exercice 1

1. Soit $X$ un variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance 18 et d'écart-type 2.5 ($X \sim \mathcal{N}(18, 2.5)$). Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X < 17) \qquad P(X > 20) \qquad P(16 < X < 19.5)$$

2. Soit $X$ une variable aléatoire qui suit une loi $\mathcal{N}(68, 15)$. Calculer la valeur de $a$ pour que $P(X < a) = 0.8315$.

## Exercice 2

Après la correction d'une épreuve d'examen comportant un grand nombre de candidats, on constate que les notes ont pour moyenne 12 et pour écart-type 3. On se propose de prélever un échantillon aléatoire non exhaustif de 100 notes.

1. Quelle est la probabilité que la moyenne d'un tel échantillon soit supérieure à 12.5 ?
2. Quelle est la probabilité que la moyenne d'un tel échantillon soit comprise entre 12.5 et 12.9 ?

## Exercice 3

Un candidat $A$ a obtenu 52 pourcent des suffrages exprimés à une élection.

1. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon aléatoire non exhaustif de taille $n = 50$ prélevé parmi les suffrages exprimés, strictement moins de 50 pourcents de voix pour le candidat $A$ ?
2. Reprendre les calculs précédents avec $n = 500$.

## Exercice 4

Une machine fabrique des disques pleins en grande quantité. On suppose que la variable aléatoire $X$ qui, à chaque disque tiré au hasard, associe son diamètre suit une loi normale $\mathcal{N}(12.8, 2.1)$.

1. Quelle loi suit la variable $\bar{X}$, qui, à chaque échantillon aléatoire non exhaustif de taille $n = 49$, associe la moyenne des diamètres des disques de cet échantillon ?
2. Déterminer un intervalle centré en 12.8 tel que la variable aléatoire $\bar{X}$ prenne ses valeurs dans cet intervalle avec la probabilité 0.95.

3. On se propose de prélever un échantillon aléatoire non exhaustif de taille $n$. Déterminer $n$ pour que la moyenne des diamètres des disques prélevés ne s'écarte pas de 12.8 de plus de 0.2 mm, avec une probabilité de 0.95.

## Exercice 5

Une usine produit des disques en grande série. On appelle $X$ la variable aléatoire qui, à chaque disque pris au hasard associe son diamètre. On suppose que $X$ suit une loi normale de moyenne $m = 50$ et d'écart-type $\sigma = 0.5$. On prélève au hasard des échantillons non exhaustifs de 36 disques. Le tirage ainsi opéré sera considéré comme un tirage avec remise. On note $\bar{X}$ la variable qui, à chaque échantillon, associe la moyenne des 36 disques.

1. Quelle est la loi de $\bar{X}$ ?
2. Déterminer le réel $a$ tel que
$$P(50 - a \leqslant \bar{X} \leqslant 50 + a) = 0.9.$$

## Exercice 6

A un examen auquel se présente 160000 candidats, 100 copies ont été corrigées. Dans ce paquet, on a obtenu une moyenne de 8.5 et un écart-type de 3.23.

1. Donner une estimation ponctuelle de la moyenne $m$ et de l'écart-type $\sigma$ des notes des candidats.
2. Donner un intervalle de confiance de $m$ centré en 8.5 au seuil de confiance 95 pourcent.

## Exercice 7

On a contrôlé le dosage d'un produit dans un mélange à la sortie d'une chaîne de conditionnement. On a prélevé de manière aléatoire et non exhaustive un échantillon de 100 lots de 5 kilogrammes de mélange analysé, on a obtenu les résultats suivants, où $P_i$ représente la masse du produit exprimé en grammes et $n_i$ l'effectif correspondant.

| $P_i$ | 142 | 144 | 146 | 148 | 150 | 152 | 154 | 156 | 158 | 160 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 5 | 6 | 21 | 32 | 22 | 7 | 4 | 1 | 1 |

1. Calculer la moyenne et l'écart-type des masses du produit de cet échantillon.
2. A partir des résultats obtenus pour cet échantillon, donner une estimation ponctuelle de la moyenne $m$ et de l'écart-type $\sigma$ de la masse du produit de la population.
3. On suppose que la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de 100 lots associe la moyenne des masses du produit, suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \frac{\sigma}{\sqrt{100}})$ et on prend pour $\sigma$ l'estimation ponctuelle calculée à la question 2. Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne $m$ de la population avec le coefficient de confiance 95 pourcent.
4. Même question avec le coefficient de confiance 99 pourcent, puis avec le coefficient de confiance 90 pourcent.

## Exercice 8

On veut estimer l'espérance mathématique $\mu$ d'une variable $X$ qui suit une loi normale dont on connait l'écart-type $\sigma = 2.3$. Quelle est la taille minimale de l'échantillon de $X$ qui est à prendre si l'on veut obtenir pour $\mu$ un intervalle de confiance de seuil de risque $\alpha = 0.05$ et dont la longueur ne dépasse pas 0.1 ?