Théorie des probabilités - Exercices

Allan Merino

Exercice 0.1. Calculer l'espérance et la variance dans le cas d'une loi de Poisson, d'une loi exponentielle et d'une loi normale de paramètres m et σ^2.

Exercice 0.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et sur cet espace, considérons une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ d'évènements indépendants.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_i)).$$
2. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(A_i) = p$, $p \in]0, 1[$. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1.$$

Exercice 0.3. Déterminer les variables aléatoires réelles X, de fonction de répartition F_X, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, telles que :

$$2a\mathrm{F}_\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{F}_\mathrm{X}^2 + aF_X = 0,$$

où a est une constante réelle positive.

Exercice 0.4. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète définie sur cet espace de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$. On considère sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire discrète Y, indépendante de la variable aléatoire X, de loi de probabilité

$$\mathbb{P}_Y = \frac{3}{5}\delta_{-1} + \frac{1}{5}\delta_0 + \frac{1}{5}\delta_1.$$

1. Calculer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $F_Y(x) = \frac{1}{10}x + \frac{7}{10}$.
3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y^2.
4. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Z définie par $Z = sup(X, Y)$.

5. Soit T la variable aléatoire définie par $T = inf(Z, Y^2)$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire T.
   (b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(T)$, et la variance $\mathbb{V}(T)$, de la variable aléatoire T.
6. Calculer la probabilité de l'évènement $(Z = T)$.

Exercice 0.5. Soit X une variable aléatoire réelle absolument continue définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ de densité f_X définie par :

$$f_X(x) = \begin{cases} cos(x) & \text{si } x \in]0, \pi/2[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = tan(X).$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y.
2. Déterminer, si elle existe, la densité f_Y de la variable aléatoire Y.
3. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y.

Exercice 0.6 (Somme de lois exponentielles)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité exponentielle de paramètres respectifs α et β $(\alpha \neq \beta)$. Montrer que la variable aléatoire $X + Y$ a pour densité :

$$f_{X+Y}(x) = \alpha\beta \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{\beta - \alpha} 1_{]0,+\infty[}(x).$$

Remarque 0.7. Il existe un résultat plus général qui est : si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de densité respectives f_X et f_Y, alors, on a :

$$f_{X+Y} = f_X \star f_Y \tag{1}$$

où $\star$ correspond au produit de convolution standard.

Exercice 0.8. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \tag{2}$$

Exercice 0.9. Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire dont la densité, notée $f_{(X,Y)}$, est donnée par :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2y}e^{-x} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Que vaut $P(X < Y)$?

3. Calculer l'espérance du produit XY.
4. On définit la variable aléatoire $Z = X + Y$. Que vaut $P(Z \leqslant t), t \in \mathbb{R}$?

Exercice 0.10. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de densité $f(x) = \frac{1}{x^2} 1_{[1,+\infty[}(x)$. Soient U et V deux variables aléatoires définies par :

$$U = X_1 X_2 \quad V = \frac{X_1}{X_2}.$$

1. Déterminer la loi de probabilité du couple (U, V).
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?
3. Calculer les lois de probabilité des variables aléatoires U et V.
4. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{UV}}\right)$.

Exercice 0.11 (Extrait examen de janvier 2014)**.** Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, c'est-à-dire que X est de densité f_X donnée par $f_X(x) = 1_{[0,1]}(x)$. Soient $\lambda > 0$ et $Y = -ln(X)/\lambda$.

1. Montrer que F_X, la fonction de répartition de X, est donnée par $F_X(t) = min(t^+, 1)$, où $t^+ = max(t, 0)$.
2. Vérifier que $X > 0$ presque sûrement et en déduire que Y est bien définie. Calculer F_Y, la fonction de répartition de Y puis donner la loi de Y.
3. Démontrer que l'on a, pour toute fonction borélienne bornée g,

   $$\mathbb{E}(g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \lambda e^{-\lambda y} 1_{\mathbb{R}^+}(y) dy.$$

   Retrouver par ce calcul la loi de Y.

Exercice 0.12. Extrait de janvier 2014

Soient $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y\}$ et $Z = (X, Y)$ une variable aléatoire de densité $f_{(X,Y)}$ donnée par :

$$f_Z(x, y) = c e^{-y} 1_\Delta(x, y).$$

1. Calculer la constante c.
2. Déterminer les lois marginales de Z. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Trouver les lois des variables aléatoires $T = X - Y$ et $R = X/Y$.

Exercice 0.13. Extrait de janvier 2014

Si Z est une variable aléatoire réelle, on pose $\Lambda_Z(s) = \mathbb{E}(e^{sZ}), s \in \mathbb{R}$. Soient Y une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et X une variable aléatoire $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

1. Démontrer que $\Lambda_Y(s) = e^{s^2/2}$. En déduire la valeur de $\Lambda_X(s)$.
2. Que valent $\Lambda_X^{'}(0)$ et $\Lambda_X^{''}(0) - \Lambda_X^{'}(0)^2$?