Soutien d'Algèbre II - Exercices

Allan Merino

9 Janvier 2014

Rappel 0.1. Chaque permutation $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\sigma \neq Id$ est produit de cycles disjoints : une telle expression est unique à l'ordre près des facteurs.

Exercice 0.2 (Conjugaison dans $\mathscr{S}_n$)**.**

1. Montrer que deux permutations de $\mathscr{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont les mêmes longueurs de cycles dans leurs décompositions en produits de cycles disjoints.
2. Montrer que le centre de $\mathscr{S}_n$ est trivial pour $n \geqslant 3$.

Exercice 0.3. On dit qu'un groupe G est simple si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et G.

1. Dénombrer les classes de conjugaison de $\mathscr{A}_5$. Déterminer le cardinal de chacune d'entre elles.
2. Démontrer qu'un sous-groupe d'un groupe quelconque L est distingué si et seulement si L est réunion de classes de conjugaison.
3. Déduire de ce qui précède que $\mathscr{A}_5$ est un groupe simple (Indication : Utiliser le théorème de Lagrange).

Exercice 0.4 (Les groupes monogènes)**.** Montrer que tout groupe monogène est isomorphe à $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? A quelle condition ce dernier est-il un corps ?

Rappel 0.5. Le centre d'un p-groupe est non trivial.

Exercice 0.6 (Les groupes d'ordre p^2)**.** Considérons G un groupe d'ordre p^2 avec p premier.

1. Déterminer l'ordre possible des éléments de G.

   Considérons à présent que G n'est pas cyclique.
2. Déterminer alors l'ordre de tous les éléments de G.
3. Soit $a \neq e \in Z(G)$. Montrer qu'il existe b tel que b n'appartient pas au sous-groupe engendré par a.
4. Notons $< a >$ et $< b >$ les sous-groupes engendrés par a et b respectivement. Montrer que l'application :

   $$\psi :< a > \times < b > \to G, \quad (a^n, b^m) \to a^n b^m$$

   est un morphisme de groupe injectif.

5. A isomorphisme près, combien existe-t-il de groupes d'ordre p^2 ?

Exercice 0.7. Soit un espace affixe X de dimension 3. On considère un cube dont on note S l'ensemble des sommets. On note G le groupe des isométries de X laissant invariant S. On considère l'action ψ de G sur S définie par $u.M = u(M)$ pour tous $u \in G$ et $M \in S$.

1. Soit $A \in S$. Etudier le stabilisateur $Stab_{\phi}(A)$ et déterminer son ordre.
2. Prouver que l'action de G sur S est transitive. En déduire l'ordre de G.

Exercice 0.8 (Eléments nilpotents)**.** Soit A un anneau commutatif unitaire.

1. Montrer que l'ensemble I des éléments nilpotents de A est un idéal.
2. Montrer que pour tout $x \in A$, si $1 - x \in I$, alors x est inversible, et $1 - x^{-1}$ est encore dans I.

Exercice 0.9.

1. Soit A un anneau commutatif intègre. On considère l'anneau des polynômes $A[X]$. Montrer que cet anneau est principal si et seulement si A est un corps. (Indication : Pour prouver que la condition est nécessaire, choisir $a \in A^*$ et considérer l'idéal engendré par a et X).
2. En déduire que les anneaux $\mathbb{Z}[X]$ et $A[X_1, \dots, X_n], (n \geqslant 2)$ ne sont pas principaux.
3. Montrer que si A est factoriel, alors $A[X_1, \dots X_n]$ est factoriel.

Rappel 0.10. Soit A un anneau. Un idéal I de A est dit premier si il vérifie :

$$a, b \in A/a.b \in I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I. \tag{1}$$

Un idéal I de A est dit maximal si il n'existe pas d'idéal $J \neq A$ qui contienne strictement I.

Exercice 0.11. Soit A un anneau commutatif unitaire et I un idéal de A. Montrer que :

1. A/I est intègre si et seulement si I est premier.
2. A/I est un corps si et seulement si I est maximal.

Exercice 0.12. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ le sous-anneau de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et $\sqrt{10}$. Montrer que 2 est irréductible mais non premier dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ et en déduire que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ n'est pas factoriel. (On remarquera que $6 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$).

Exercice 0.13. Montrer que les seuls idéaux bilatères de $M(n, \mathbb{R})$ sont $\{0\}$ et $M(n, \mathbb{R})$.

Exercice 0.14. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (avec p et q premiers entre eux) est une racine de P, alors p divise a_0 et q divise a_n.
2. Montrer que toute racine rationnelle d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ est entière.

Exercice 0.15. L'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$

On considère l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$, sur lequel on définit une application norme, N, donnée par :

$$N(a + ib\sqrt{2}) = a^2 + 2b^2 \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que l'application N est multiplicative.
2. Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
3. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est euclidien.
4. Montrer que $i\sqrt{2}$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.

Nous allons à présent voir une application de ce genre de résultat.

Exercice 0.16. Le but de cet exercice est de montrer que $(3, 5)$ et $(3, -5)$ sont les seules solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation :

$$y^2 + 2 = x^3. \tag{2}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ est un anneau euclidien.
2. En déduire que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de (2), il existe des entiers a et b vérifiant :

$$y + i\sqrt{2} = (a + ib\sqrt{2})^3.$$

3. Conclure.

Exercice 0.17 (Une condition nécessaire)**.** Montrer que si A est un anneau euclidien, il existe un élément x de A non inversible tel que la restriction du morphisme nature $A \to A/(x)$ à l'ensemble $A^* \cup \{0\}$ soit surjective. (Indication : considérer un élément de stathme minimal).

Exhiber un tel élément dans le cas $A = \mathbb{Z}$, $A = k[X]$ et $A = \mathbb{Z}[i]$.

Remarque 0.18. Ce résultat peut, par exemple, être utilisé pour montrer que l'anneau $\mathbb{Z}\left[\frac{1 + i\sqrt{19}}{2}\right]$ est un anneau principal mais non euclidien.