MAT 2525 - Devoir Maison 1

Exercice 1

1. *(5 points)* Soit $\{x_n\}_n$ une suite réelle telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Montrer que la suite $\left\{\frac{x_n}{1+x_n}\right\}_n$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
2. Calculer, à l'aide de la définition vue en cours, la limite des suites suivantes :
   (a) $x_n = \frac{1}{n^\alpha}, n \geq 1, \alpha \in \mathbb{R}$, *(5 points)*
   (b) $x_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, n \geq 1$, *(6 points)*
3. *(5 points)* En utilisant le Théorème du Sandwich, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1$.
4. *(5 points)* Donner cinq exemples de suites bornées telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 0$.

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\{x_n\}_n$ la suite définie par

$$x_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(kx) = \frac{\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(2x) + \ldots + \mathrm{E}(nx)}{n^2}.$$

Montrer que $\{x_n\}_n$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{x}{2}$. *(10 points)*

Exercice 3

1. Soit $\{x_n\}_n$ la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, x_{n+2} = \frac{7}{2}x_{n+1} + 2x_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

   (a) *(5 points)* Donner une expression simplifiée de x_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) *(2 points)* Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.
   (c) *(2 points)* Est-ce que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe ? Si oui, déterminer la limite.
2. Peut-on trouver des réels $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la suite récurrente linéaire d'ordre 2 $\{x_n\}_n$ donnée par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

   satisfaisant :
   (a) $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$,
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1908}{\pi^3}$? *(4 points)*

Exercice 4

Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$x_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}}.$$

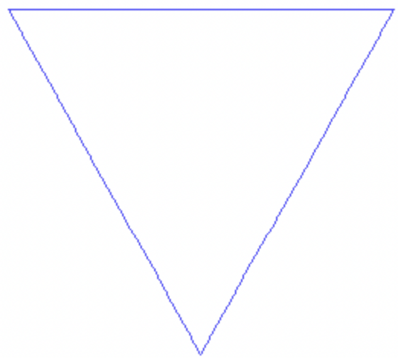
1. *(6 points)* Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est croissante (on pourra raisonner par récurrence) .
2. *(6 points)* Montrer que $\sqrt{n} \leq x_n < \sqrt{n} + 1$ pour tout $n \geq 1$.
3. *(4 points)* Montrer que la suite $\{\frac{x_n}{n+1}\}_n$ converge vers 0 .
4. *(4 points)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x_n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} - 1\right).$$

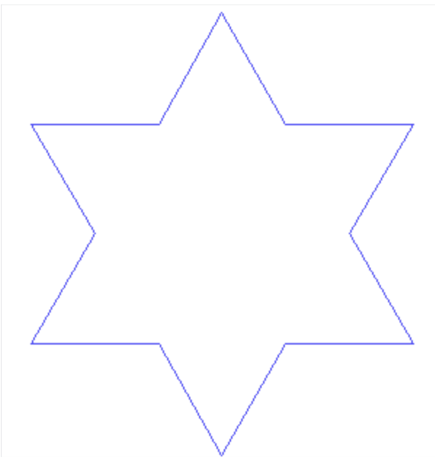
5. **BONUS :** Soit $\{y_n\}_n$ la suite définie par $y_n = x_n - \sqrt{n}, n \geq 1$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \frac{1}{2}$. *(8 points)*

Exercice 5

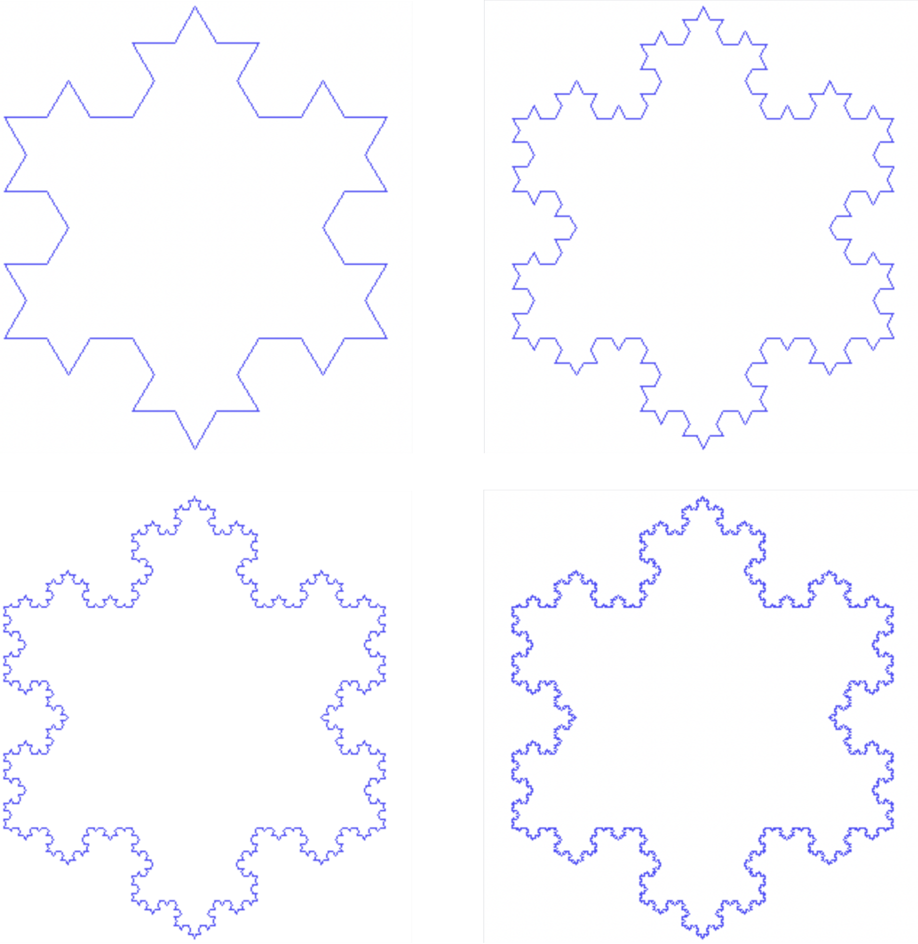
Soit $\mathscr{F}_0$ le triangle équilatéral suivant



Pour simplifier, on suppose que la longueur de la base du triangle $\mathscr{F}_0$ est 1. On construit à présent $\mathscr{F}_1$. On coupe chacun des côtés du triangles $\mathscr{F}_0$ en trois parts égales. On remplace le segment du milieu de chaque côtés par un triangle équilatéral comme suit :



On réitère ce processus "indéfiniment". Les figures suivantes représentent $\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4$ et $\mathscr{F}_5$.



A la suite de figures géométriques $\{\mathscr{F}_n\}_n$, on associe les suites suivantes :

— $\{c_n\}_n$, où c_n est le nombre de côtés de $\mathscr{F}_n$,
— $\{l_n\}_n$, où l_n est la longueur d'un côté de $\mathscr{F}_n$ (tous les côtés de $\mathscr{F}_n$ ayant la même longueur) ,
— $\{\mathscr{P}_n\}_n$, où $\mathscr{P}_n$ est le périmètre de $\mathscr{F}_n$,
— $\{\mathscr{A}_n\}_n$, où $\mathscr{A}_n$ est l'aire de $\mathscr{F}_n$.

1. *(4 points)* Montrer que les suites $\{c_n\}_n$ et $\{l_n\}_n$ sont géométriques et préciser leurs raisons respectives .
2. *(2 points)* Donner une expression simplifiée de $\mathscr{P}_n$ en fonction des suites c_n et l_n .
3. *(2 points)* Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{P}_n = +\infty$.
4. *(5 points)* Etablir une relation entre $\mathscr{A}_{n+1}$ et $\mathscr{A}_n$ en fonction des suites $\{c_n\}$ et $\{l_n\}_n$.
5. *(6 points)* Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = \frac{8}{5}\mathscr{A}_0$.

Exercice 6

Montrer que la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et déterminer sa valeur . *(2 + 10 = 12 points)*