MAT 2525 - DGD 7 - Séries de fonctions

Allan Merino

Exercice 1

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. *Montrer que pour tout* $x \in]-1\,,1[$, *on a* $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.
3. *Montrer que* $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. *Montrer que* $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n+1}$ *sur* $]-1\,,1[$.

Exercice 2

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^n x^n \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 7^n} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 e^n}{n!} x^n$$

Exercice 3

Soit $\mathrm{D} = [0\,,1]$ *et* $a \in \mathbb{R}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère*

$$f_n(x) = n^a x^n (1-x)\,.$$

1. *Etudier la convergence simple de la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
2. *Etudier la convergence normale de la série de fonctions* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
3. *Supposons* $a = 0$. *Que vaut* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur* $[0\,,1]$.
4. *Montrer de la convergence n'est pas uniforme si* $a > 0$.

Exercice 4

Soit $\{f_n(x)\}_n$ *la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par*

$$f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}, \qquad (x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*).$$

1. *Démontrer que la série* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Démontrer que la convergence n'est pas normale sur* $\mathbb{R}^+$.
3. *Soit* $a > 0$. *Montrer que* $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ *converge normalement sur* $[a, +\infty[$.
4. *Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur* $\mathbb{R}^+$.

Exercice 5

Soit $\{f_n\}_n$ *la suite de fonctions définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par*

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}, \qquad (n \geq 2, x \in \mathbb{R}^+).$$

1. *Démontrer que* $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}^+$.
2. *Montrer que la convergence n'est pas normale sur* $\mathbb{R}^+$.
3. *Démontrer que pour tout* $x > 0$, *on a*

$$0 \leq \mathrm{R}_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})}.$$

En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.