

MAT 2525 - DGD 6 - Suites de fonctions

Allan Merino

Exercice 1

1. Soient $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ les suites de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 3n^2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2n}\right] \\ -3n^2\left(x - \frac{1}{n}\right) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \quad g_n(x) = nx(1-x^2)^n.$$

Etudier la convergence simple et uniforme de $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions de \mathbb{R} donnée par

$$f_n(x) = \frac{a^2}{a^2 + n^2x^2}.$$

Etudier la convergence simple et uniforme de $\{f_n\}_n$.

Exercice 2

Soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = \frac{n^2x}{1 + n^5x^2}.$$

Montrer que $\{f_n\}_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction f que l'on déterminera et montrer que $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$.

Exercice 3

Soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$. Montrer que $\{f_n\}_n$ converge simplement (et uniformément) vers une fonction f que l'on déterminera.

Exercice 4

Soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

1. Montrer que $\{f_n\}_n$ converge simplement vers f que l'on déterminera.

2. Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. En déduire que $\{f_n\}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3. Soit $a \in]0, 1]$. Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$.

Exercice 5

Etudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions $\{f_n\}_n$ et $\{g_n\}_n$ définies sur \mathbb{R}^+ par

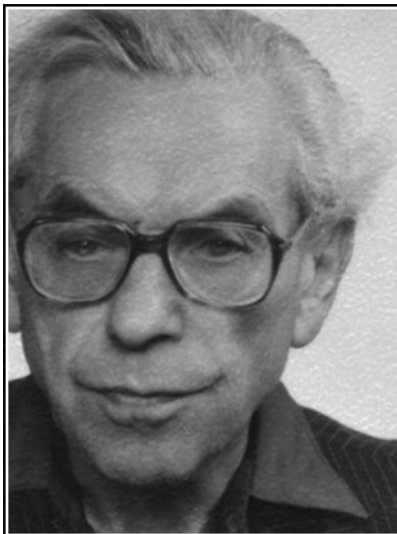
$$f_n = e^{-nx} \sin(2nx), \quad g_n = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

Que peut-on dire de la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$?

Exercice 6

Soit $\{f_n\}_n$ la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que $\{f_n\}_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera. Est-ce que f est dérivable ?
2. Montrer que $\{f'_n\}_n$ converge simplement vers $[0, 1]$ vers une fonction g que l'on déterminera.
3. Puisque $f' \neq g$, est-ce une contradiction avec le théorème vu en cours ?



Why are numbers beautiful? It's like asking why is Beethoven's Ninth Symphony beautiful. If you don't see why, someone can't tell you. I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is.

— Paul Erdős —

AZ QUOTES