MAT 2525 - DGD 5 - Intégrale de Riemann - Intégrales impropres

Allan Merino

Exercice 1 – Intégrale de Riemann - Polynôme

1. *Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer, en utilisant la définition vue en cours, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(x) = x^n$ est intégrable au sens de Riemann.*
2. *Montrer que tout polynôme est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0\,,1] \\ 0 & si\ x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0\,,1] \end{cases}$$

n'est pas intégrable.

Exercice 3

Soient $n_1, \ldots, n_k$ des entiers strictement positifs tels que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ et soit $\Psi_{n_1,\ldots,n_k}$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\Psi_{n_1,\ldots,n_k}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \neq \frac{1}{n_i}\,, i = 1, \ldots, k \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Montrer que f est intégrable au sens de Riemann et calculer $\displaystyle\int_0^1 \Psi_{n_1,\ldots,n_k}(x)dx$.

Exercice 4

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 x^k dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{i=1}^{n} i^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}.$$

Exercice 5 – Intégrale de Dirichlet

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est semi-convergente.

Pour l'exercice précédent, on peut utiliser le théorème suivant : Soit $f : [a\,, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si pour toute suite $\{x_n\}_n$ de $[a\,, b[$ qui converge vers b, la série $\displaystyle\sum_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ converge.

Exercice 6 – Intégrale de Bertrand

Montrer que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$.

Exercice 7

1. *Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :*

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}dt\,.$$

2. *Pour quelles valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *les intégrales impropres suivantes sont convergentes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha}dt\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^\alpha}dt\,.$$