MAT 2525 - DGD 4 - Topologie, Limite et Continuité de Fonctions

Allan Merino

Exercice 1 – Lois de Morgan

Pour tout sous-ensembles X, Y *de* Z*, on a*

$$(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y})^c = \mathrm{X}^c \cap \mathrm{Y}^c\,, \qquad (\mathrm{X} \cap \mathrm{Y})^c = \mathrm{X}^c \cup \mathrm{Y}^c\,.$$

Exercice 2 – Espaces ouverts & fermés

1. *Est-ce que l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}\,, |x-1| < 2\}$ *est ouvert ?*
2. *Peut-on trouver deux sous-ensembles non-ouverts* A *et* B *de* $\mathbb{R}$ *tels que* $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ *est ouvert ?*
3. *Déterminer les points d'accumulation de*

$$\mathrm{E}_1 = \left\{1 + \frac{2}{n}\,, n \in \mathbb{N}^*\right\}\,, \qquad \mathrm{E}_2 = \{x \in \mathbb{Q}\,, 0 < x < \pi\}\,.$$

Les ensembles E_1 *et* E_2 *sont-ils fermés ?*

Exercice 3 – Espaces Compacts

1. *Montrer que pour des sous-espaces compacts* $\mathscr{C}_1, \ldots, \mathscr{C}_n$ *de* $\mathbb{R}$*, les espaces* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ *et* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathscr{C}_i$ *sont compacts. Est-ce valable pour un nombre infini d'espaces ?*
2. *Soit* E *un sous-ensemble compact de* $\mathbb{R}$*. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on note* $\mathrm{E}_x = \{x + y\,, y \in \mathbb{R}\}$*. Montrer que*
   (a) E *est ouvert si et seulement si* E_x *est ouvert.*
   (b) E *est compact si et seulement si* E_x *est compact.*

Exercice 4

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. En utilisant la définition vue en cours, montrer que pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.
2. *Soit* P *un polynôme réel. Montrer que pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}$*, on a* $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(x_0)$.

Exercice 5

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \mathrm{E}(x)$*, où* E *est la fonction partie entière. Montrer que* f *admet une limite au point* x_0 *si et seulement si* $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

Exercice 6

1. *En utilisant la définition vue en cours, montrer que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{2}\,.$$

2. *Pour quelles valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} & si\ x \neq 0 \\ \alpha & si\ x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 7 – Continuité de fonctions

1. *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

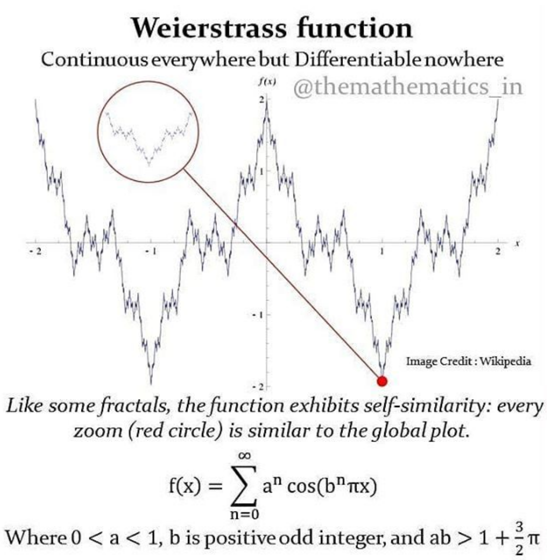
$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f *est continue en* 0 *uniquement.*

2. *Soit* f *une fonction continue en un point* $x_0 \in \mathrm{D}(f)$. *Montrer que la fonction* $|f|$ *est continue au point* x_0. *La réciproque est-elle correcte ?*

Exercice 8 – Fonction uniformément continue

1. *Montrer que la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *est uniformément continue sur* $]0, +\infty[$.
2. *Montrer que la fonction* $f(x) = x^2$ *n'est pas uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.



(Futur exercice 1 du Midterm 2)