MAT 2525 - DGD 3 - Les séries numériques

Allan Merino

Exercice 1

Montrer que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}},$$

sont divergentes.

Exercice 2

Etudier la convergence ou divergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+4}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, (a > 0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n+7}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^n}{n^{n^2}}.$$

Exercice 3

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ *converge et calculer sa somme (on assumera pour ce calcul que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$*).*

Exercice 4 – Critère du quotient

Soient $\{a_n\}_n$ *et* $\{b_n\}_n$ *deux suites telles que* $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \mathrm{L}$*. Montrer que*

1. *Si* $\mathrm{L} \neq 0$ *ou* $+\infty$*, alors les séries* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *sont de même nature.*
2. *Si* $\mathrm{L} = 0$ *et si la série* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge absolument, alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument. De même, si la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge, alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *diverge.*
3. *Si* $\mathrm{L} = +\infty$ *et si la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *diverge, alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge. De même, si la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, alors la série* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *converge.*

Exercice 5

Etudier la convergence ou divergence des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5n^2}{n!+8n}.$$

Exercice 6 – Produit de Cauchy

Soient $\{a_n\}_n$ et $\{b_n\}_n$ deux suites réelles. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Supposons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (resp. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$) converge absolument (resp. converge). Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 7

Donner un exemple de suite $\{x_n\}$ tel que $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ et tel que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$ diverge.

Exercice 8

Calculer la valeur des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}, \qquad \sum_{n=0} \frac{1}{n^2+4n+3}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+n^2-2n}.$$

Exercice 9

1. *Soit k un entier tel que $k \geq 2$. Montrer que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k-1}$.*
2. *Montrer la série $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k}\right)$ converge.*

Exercice 10

Soit $\{x_n\}_n$ une suite de nombres réels (strictement) positifs tel que $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x_n}$ diverge. La réciproque est-elle correcte ?

Exercice 11

Soit $\{x_n\}_n$ *une suite de nombres réels positifs telle que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge. Montrer que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ *converge.*

Exercice 12 – Critère d'Abel

1. *Montrer que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *converge.*
2. *Montrer que la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ *diverge. Est-ce que cela contredit le critère d'Abel ?*

Exercice 13 – Critère de Raabe

1. *Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite réelle telle que* $x_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que si* $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) > 1$, *alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *est convergente. Que peut-on dire si* $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < 1$ *? Et si* $\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = 1$ *?*
2. *Soit* $\{x_n\}_n$ *la suite définie par*

$$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

   Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *diverge.*

Exercice 14 – Théorème de Riemann

Soit $\{x_n\}$ *une suite réelle telle que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *converge mais ne converge pas absolument.*

1. *Montrer qu'il existe un réarrangement* f *tel que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ *diverge.*
2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Il existe un réarrangement* f *tel que* $\sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$ *converge et tel que* $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_{f(n)}$.

Exercice 15 – Formules de Ramanujan pour π

Montrer en moins de cinq secondes que les formules obtenues pour π *par le mathémagicien Ramanujan sont correctes :*

A few formulae (out of the many possible ones)

$$\frac{1}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^3(42n+5)}{2^{12n+4}(n!)^6} \qquad \pi=4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1}(n!)^4(441)^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}\right)^{-1}$$

By denoting $(x)_n$ the value : $\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)=\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}=x(x+1)\ldots(x+n-1)$ (it's Pochhammer's symbol), we get :

$$\pi=4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n(n!)^3}\right)^{-1} \qquad \pi=32\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(42\sqrt{5}n+5\sqrt{5}+30n-1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n(n!)^3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{27}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi=\frac{15\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi=\frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 3^n 4^{n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi=4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 2^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 5^n 72^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi=4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(260n+23)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 18^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi=2\sqrt{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 9^n}\right)^{-1}$$

$$\pi=\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(40n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 49^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi=\frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(280n+19)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3 99^{2n+1}}\right)^{-1}$$

Si il vous a fallu 10 secondes pour y répondre, n’ayez pas peur de l’admettre !