MAT 2525 - DGD 2 - Les suites numériques

Exercice 1

Démontrer, en utilisant la définition de la convergence d'une suite vue en cours, que :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^3+7} = 0\,,$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0\,,$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1\,,$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}\,.$

Exercice 2

Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par $x_{n+1} = \frac{1}{6}(2x_n + 3)$ et $x_0 = 1$.

1. *Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n > \frac{3}{4}$.*
2. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est décroissante.*
3. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 3

Soit $\{x_n\}_n$ la suite définie par

$$x_0 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

1. *Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n$ et $1 \leq x_n^2 \leq 2$.*
2. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est croissante.*
3. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 4

Soit $\{x_n\}_n$ une suite définie par

$$x_0 = 0\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq x_n < 3$.*
2. *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.*
3. *Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 5

Soit $\{x_n\}_n$ une suite définie par

$$x_0 = 1\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{2^n}}\,, \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 6

Soit $\{x_n\}_n$ *une suite définie par*

$$x_0 = 1 \,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 1} \,, \qquad (n \in \mathbb{N}) \,.$$

Montrer que la suite $\{x_n\}_n$ *est convergente et déterminer sa limite.*

Exercice 7

Soit $\{x_n\}_n$ *la suite définie, pour tout* $n \geq 1$*, par*

$$x_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{n-2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}} \,.$$

1. *Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *est croissante et que* $\sqrt{n} < x_n < \sqrt{n} + 1$ *pour tout* $n \geq 1$.
2. *Soit* $\{y_n\}_n$ *la suite définie par* $y_n = x_n - \sqrt{n}, n \geq 1$. *Montrer que la suite* $\{y_n\}_n$ *converge et déterminer sa limite.*

Exercice 8

Soit $\{x_n\}_n$ *la suite définie pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $x_n = \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=1}^{n} k!$.

1. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*, on a* $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{n+1}$.
2. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$*, on a* $1 \leq u_n < 2$.
3. *Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *est convergente et déterminer sa limite*.

Exercice 9 – Produit de suites de Cauchy

Soient $\{x_n\}_n$ *et* $\{y_n\}_n$ *deux suites de Cauchy. Soit* $\{z_n\}_n$ *la suite définie pour tout* n *par* $z_n = x_n y_n$. *Montrer que la suite* $\{z_n\}_n$ *est de Cauchy.*

Exercice 10

1. *Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite. Supposons qu'il existe* $\alpha > 0$ *et* $\beta \in]0, 1[$ *tel que*

   $$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha\beta^n \,, \qquad (n \geq 1) \,.$$

   Montrer que $\{x_n\}_n$ *est une suite de Cauchy.*
2. *Soit* $\{x_n\}_n$ *une suite telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$. *Est-ce une suite de Cauchy ?*

Exercice 11

Soit $\{x_n\}_n$ *la suite définie, pour* $n \geq 1$*, par* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. *Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *n'est pas une suite de Cauchy.*

Exercice 12

Soit $\{x_n\}_n$ *une suite satisfaisant*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}), (\forall n > \mathrm{N}), |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon .$$

Est-ce que la suite $\{x_n\}_n$ *est de Cauchy ?*

Exercice 13

Soit $\{x_n\}_n$ *une suite telle que* $x_n \in \mathbb{N}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que la suite* $\{x_n\}_n$ *est convergente si et seulement si il existe* $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *tel que* $x_n = x_m$ *pour tout* $n, m > \mathrm{N}$.

Exercice 14

Soit $x \in \mathbb{R}$ *et* $\{x_n\}_n$ *la suite définie par*

$$x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(nx) = \frac{\mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(2x) + \ldots + \mathrm{E}(nx)}{n^2} .$$

Montrer que $\{x_n\}_n$ *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 15

Soit $\{x_n\}_n$ *une suite réelle et soient* $\{y_n\}_n$ *et* $\{z_n\}_n$ *les suites extraites de* $\{x_n\}_n$ *définies par* $y_n = x_{2n}, z_n = x_{2n+1}, n \in \mathbb{N}$.

1. *Supposons que les suites* $\{y_n\}_n$ *et* $\{z_n\}_n$ *convergent. Est-ce que la suite* $\{x_n\}_n$ *converge ?*
2. *Supposons que les suites* $\{y_n\}_n$ *et* $\{z_n\}_n$ *convergent et* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. *Est-ce que la suite* $\{x_n\}_n$ *converge ?*

Exercice 16

Déterminer la limite supérieure et inférieure des suites suivantes :

1. $x_n = (-1)^n n \, , n \in \mathbb{N} \, ,$
2. $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) , n \in \mathbb{N} \, ,$
3. $x_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) , n \in \mathbb{N} \, ,$
4. $x_n = 1 + (-1)^n \, , n \in \mathbb{N} \, .$
5. $x_n = \begin{cases} \pi + \frac{1}{n} & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases} .$