MAT 2525 - DGD 1 - Les nombres réels

Exercice 1 – Raisonnement par récurrence

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer les propriétés suivantes.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$,
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a \in \mathbb{R}^+$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.
4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leq n\,|\sin(x)|$.
5. *Pour tout* $n \geq 1$, $n^3 + 5n$ *est divisible par* 6.
6. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \geq 4$, *on a* $n^2 \leq 2^n$.

Exercice 2 – Axiome de complétude

Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ *défini par*

$$\left\{x \in \mathbb{Q}\,,\, x^2 < 2\right\}$$

est borné mais n'admet pas de plus petite borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 – Borne supérieure et inférieure

1. *Donner un exemple d'un ensemble* S *majoré et non minoré.*
2. *Soient* A *et* B *deux sous-ensembles non vide bornés de* $\mathbb{R}$. *Soit* $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *donné par*
$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \{a+b\,,\, a \in \mathrm{A}, b \in \mathrm{B}\}\ .$$
Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ *est borné et que* $\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B})$ *et* $\inf(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \inf(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B})$.
3. *Montrer que l'ensemble* $\mathrm{S} = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}, n, m \in \mathbb{N}^*\right\}$ *est majoré et minoré et determiner sa plus petit borne supérieure (et sa plus grande borne inférieure).*
4. *Soit* $\mathrm{S}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x^2 + 7x + 6 < 0\right\}$ *et* $\mathrm{S}_2 = \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x^2 + 7x + 6 \geq 0\right\}$. *Est-ce que les ensembles précédents sont bornés ? Majorés ? Minorés ?*
5. *Soit* S *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *donné par* $\mathrm{S} = \left\{x \in \mathbb{R}\,,\, x^4 - 2x^3 + x < 0\right\}$. *Montrer que* S *est borné et trouver sa plus petite borne supérieure.*
6. *Montrer que l'ensemble* $\mathrm{S} = \left\{\frac{2xy}{x^2+y^2}, x, y \in \mathbb{R}^*\right\}$ *est borné et déterminer sa plus petite borne supérieure.*

Exercice 4 – Valeur absolue

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$ *et* $|x| = |-x|$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$. *De plus,* $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.
3. *Pout tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $y \in \mathbb{R}^+$, $|x| \leq y$ *si et seulement si* $-y \leq |x| \leq y$.
4. *Inégalité triangulaire :* *pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.
5. *Pour tout* $x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.
6. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
7. *Pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
8. *Résoudre, dans* $\mathbb{R}$, *l'équation* $\left|x^2 + 5x + 1\right| = 2$.
9. *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$, *résoudre l'équation* $|x + a| = |x + b|$.

Exercice 5 – Corps des nombres complexes

Soit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *le corps des nombres complexes. Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre totale sur* $\mathbb{C}$ *compatible avec les opérations* $(+, \cdot)$.