

MAT 2525 - Correction Devoir Maison 2

Exercice 1

1. Soit $0 < a < 1$. Notons $x_n = na^{n-1}$, $n \geq 1$.

(a) Pour montrer la convergence de la série, on peut utiliser le critère de d'Alembert. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)a^n}{na^{n-1}} = a \frac{n+1}{n},$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$. En particulier, la série $\sum_{n \geq 1} na^{n-1}$ est convergente.

(b) Notons $X = \sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1}$. On a

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1+1)a^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)a^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} ma^m + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = a \sum_{m=1}^{+\infty} ma^{m-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \\ &= aX + \frac{1}{1-a}, \end{aligned}$$

i.e. $X(1-a) = \frac{1}{1-a}$. Ainsi, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

2. On voit facilement que pour tout $n \geq 2$, on a $(2n-1)(2n+1) = 4n^2 - 1 \geq 2n^2$, i.e. $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \leq \frac{1}{2n^2}$. Ainsi, en utilisant le Théorème de comparaison et le critère de Riemann, on obtient que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

est convergente. Calculons à présent sa valeur. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

En multipliant par $2n-1$ et en prenant $n = \frac{1}{2}$, on obtient que $a = \frac{1}{2}$. De la même manière, on obtient que $b = -\frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^m \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^m \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{n=1}^m \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2m+1)}, \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2m+1)} = \frac{1}{2}.$$

3. Soient $\{x_n^1\}_n, \{x_n^2\}_n$ et $\{x_n^3\}_n$ les suites définies par

$$x_n^1 = \frac{n^{n+a}}{n!}, \quad x_n^2 = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n, \quad x_n^3 = \frac{n^4 - an^3 + a^2n^2 - a^3n + a^4}{n^4 + 2an^3 + 4an^2 + 8an + 16}, \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

— Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^1$. On va utiliser le Critère de d'Alembert. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x_{n+1}^1}{x_n^1} = \frac{(n+1)^{n+1+a}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{n+a}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1+a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+a}$$

On sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+a} = 1,$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1}^1}{x_n^1} = e^1 > 1$. Ainsi, d'après le critère de d'Alembert, on obtient que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n+a}}{n!}$ est divergente.

— Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}.$$

En particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $e^{-a} \neq 0$. Comme vu en cours, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 \neq 0$, on obtient que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est divergente.

— Nature de $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^3$. L'idée est la même que pour la question précédente. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - an^3 + a^2n^2 - a^3n + a^4}{n^4 + 2an^3 + 4an^2 + 8an + 16}$$

et donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^3$ est divergente.

Exercice 2

1. (a) Montrons que

$$\text{Acc}(E_1) =]-\infty, 0] \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

— $]-\infty, 0] \subseteq \text{Acc}(E_1)$. Commençons par $x \in]-\infty, 0[$ et soit $\delta = \frac{|x|}{2}$. On voit facilement que $B(x, \delta) \subseteq]-\infty, 0[$. Ainsi, $x \in \text{Int}(]-\infty, 0[) \subseteq \text{Acc}(]-\infty, 0[)$ et donc $]-\infty, 0[\subseteq \text{Acc}(]-\infty, 0[)$. De même, pour tout $\delta > 0$, on a $\emptyset \neq]-\delta, 0[= B'(0, \delta) \cap]-\infty, 0[\subseteq B'(0, \delta) \cap E_1$, i.e. $0 \in \text{Acc}(E_1)$ et donc $]-\infty, 0] \subseteq \text{Acc}(E_1)$.

— $\text{Acc}(E_1) \cap]8, +\infty[= \emptyset$. On voit facilement que $\bigcup_{i=0}^7 \left\{i + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \subseteq [0, 8]$. Soit $x > 8$ et soit $\delta = \frac{x-8}{2}$. On a alors $B(x, \delta) \cap E_1 = \emptyset$, et donc $x \notin \text{Acc}(E_1)$.

— $\text{Acc}(E_1) \cap [0, 8] = \{0, \dots, 8\}$. Pour tout $i = 0, \dots, 7$, on note $F_i = \left\{i + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On voit facilement que $F_i \subseteq]i, i+1[$. Soit $x \in [0, 8]$. On va distinguer deux cas :

i. $x = i$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon$. En particulier, on a $i + \frac{1}{N(\varepsilon)} \in F_i \cap B'(i, \varepsilon)$ et donc $i \in \text{Acc}(E_1)$.

ii. $x \in]i, i+1[$. Il existe $\delta_i(x)$ tel que $B'(x, \delta_i(x)) \subseteq]i, i+1[$. De plus, on a $x - i \in]0, 1[$. Ainsi $\frac{1}{x-i} \in]1, +\infty[$ et il existe $N(i, x)$ tel que $N(i, x) \leq \frac{1}{x-i} < N(i, x) + 1$, i.e. $i + \frac{1}{N(i,x)+1} < x \leq i + \frac{1}{N(i,x)}$. On distingue deux cas.

A. Si $x \neq i + \frac{1}{N(i,x)}$. Posons $\delta = \frac{\min\left(\left|i + \frac{1}{N(i,x)} - x\right|, \left|x - i - \frac{1}{N(i,x)+1}\right|\right)}{2}$. On voit alors que $B'(i, \delta) \cap F_i = \emptyset$, et donc $x \notin \text{Acc}(E_1)$.

B. Si $x = i + \frac{1}{N(i,x)}$. Alors on a $i + \frac{1}{N(i,x)+1} < x < i + \frac{1}{N(i,x)-1}$ (notons que puisque $x \neq i+1$, on a $N(i, x) \geq 2$ et donc $N(i, x)-1 \geq 1$). Posons $\delta = \frac{\min\left(\left|i + \frac{1}{N(i,x)-1} - x\right|, \left|x - i - \frac{1}{N(i,x)+1}\right|\right)}{2}$. Alors $B'(x, \delta) \subseteq]i, i+1[$ and $B'(x, \delta) \cap F_i = \emptyset$, i.e. $x \notin \text{Acc}(E_1)$.

Finalement, on obtient que

$$\text{Acc}(E_1) =]-\infty, 0] \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

(b) Soit $E_2 = \{e^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$. On voit facilement que le seul point d'accumulation est 0. Tout d'abord, on a $E_2 \subseteq [0, 1]$. En particulier, tout point de $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$ n'est pas un point d'accumulation de E_2 . Comme dans l'exemple précédent, pour tout $x \in]0, 1]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-(n+1)} < x \leq e^{-n}$ et on voit donc facilement que $x \notin \text{Acc}(E_2)$. Finalement, en utilisant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, on a $0 \in \text{Acc}(E_2)$. On peut le montrer directement en utilisant ε, δ . En effet, soit $\varepsilon > 0$ (on peut supposer que $\varepsilon \leq 1$, sinon $e^{-n} < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Pour tout $n \geq N = E(-\ln(\varepsilon)) + 1$, on a $e^{-n} < \varepsilon$, i.e. $B'(0, \varepsilon) \cap E_2 \neq \emptyset$.

2. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} tels que $\text{Acc}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$ et $\text{Acc}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$.

(a) Montrons que $\text{Acc}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Soit $x \in \text{Acc}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$. Soit $\delta > 0$. Par définition, on a $B'(x, \delta) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, on va supposer que $B'(x, \delta) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Notons que cela implique que $B'(x, \delta_1) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ pour tout $\delta_1 > \delta$. On distingue alors deux cas :

— Si pour tout $\delta_2 < \delta$, on a $B'(x, \delta_2) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ alors $x \in \text{Acc}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Acc}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

— Sinon, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $B'(x, \delta_2) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Puisque $x \in \text{Acc}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, on obtient que pour tout $\delta_3 < \delta_2$, $B'(x, \delta_3) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ et donc pour tout $\delta_4 > 0$, on a $B'(x, \delta_4) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$, i.e. $x \in \text{Acc}(\mathcal{B})$. Ainsi $x \in \text{Acc}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Ainsi, $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, i.e. $\text{Acc}(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, et donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est fermé.

(b) Montrons que $\text{Acc}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. Soit $x \in \text{Acc}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Pour tout $\delta > 0$, on a $B'(x, \delta) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $\delta > 0$, on a $\emptyset \neq B'(x, \delta) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq B'(x, \delta) \cap \mathcal{A}$ et $\emptyset \neq B'(x, \delta) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq B'(x, \delta) \cap \mathcal{B}$, i.e. $x \in \text{Acc}(\mathcal{A})$ et $x \in \text{Acc}(\mathcal{B})$. Ainsi on a $\text{Acc}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ et donc $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ est fermé.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. Ainsi, $0 \in \bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. A présent, soit $x \in \mathbb{R}^*$. En posant $N = E\left(\frac{1}{|x|}\right) + 1$, on a $N > \frac{1}{|x|}$, et donc $\frac{1}{N} < |x|$, i.e. $x \notin \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[$. Ainsi, $x \notin \bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ et donc

$$\bigcap_{n \geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}.$$

Exercice 3

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon x_0^2}{2}\right)$. Ainsi, pour tout $x \in B(x_0, \delta)$, on a $-\frac{x_0}{2} < x - x_0 < \frac{x_0}{2}$, i.e. $0 < \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$. De plus, pour tout $x \in B(x_0, \delta)$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{xx_0} \right| < \frac{2|x_0 - x|}{|x_0|^2} < \frac{2\delta}{|x_0|^2} < \varepsilon,$$

et donc f est continue en x_0 . Le cas $x_0 < 0$ est similaire (notons que la fonction f est impaire).

2. Montrons que f n'a pas de limite en 0. Comme vu en cours, la propriété " f n'admet pas de limite en 0" s'écrit comme

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}^*, |x| < \delta \rightarrow |f(x) - \alpha| > \varepsilon.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon = |\alpha|$. Pour tout $\delta > 0$, il existe $n \geq 3$ tel que $\frac{1}{n|\alpha|} < \delta$. Ainsi, on a

$$\left| f\left(\frac{1}{n|\alpha|}\right) - \alpha \right| = |n|\alpha| - \alpha| \geq n|\alpha| - |\alpha| = (n-1)|\alpha| > \varepsilon,$$

et donc f n'a pas de limite en 0. Ainsi, on ne peut pas trouver d'éléments $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction g soit continue sur \mathbb{R} .

3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \frac{(1+y^2) - (1+x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(x-y)(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)} = |x-y| \cdot \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

— Si $x, y \geq 1$, on a $x^2 + y^2 \geq x + y$. En particulier, $(1+x^2)(1+y^2) = 1 + x^2y^2 + x^2 + y^2 > x^2 + y^2 > x + y$, et donc $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} < 1$.

— Supposons que $x, y \in]0, 1]$. En utilisant que $(1+x^2)(1+y^2) \geq 1$, on obtient que $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq x + y \leq 2$.

— Supposons à présent que $x \in]0, 1]$ et $y > 1$. Alors $(1+x^2)(1+y^2) > 1+y^2$ et $x+y \leq 1+y < 1+y^2$ et donc $\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} < 1$.

Ainsi, pour tout $x, y \in]0, +\infty[$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| \cdot \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq 2|x-y|.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient que pour tout $x, y \in]0, +\infty[$ tel que $|x-y| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Ainsi f est uniformément continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4

Soit $\varepsilon > 0$ et P_ε la partition de $[0, 4]$ donnée par

$$P_\varepsilon = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} = \left\{0, 1 - \frac{\varepsilon}{19}, 1 + \frac{\varepsilon}{19}, 2 - \frac{\varepsilon}{19}, 2 + \frac{\varepsilon}{19}, 3 - \frac{\varepsilon}{19}, 3 + \frac{\varepsilon}{19}, 4\right\}.$$

On voit alors que

$$\begin{aligned} m_1(f, P_\varepsilon) &= 0, & m_2(f, P_\varepsilon) &= 0, & m_3(f, P_\varepsilon) &= 1, \\ m_4(f, P_\varepsilon) &= 1, & m_5(f, P_\varepsilon) &= 2, & m_6(f, P_\varepsilon) &= 2, \\ m_7(f, P_\varepsilon) &= 3, & M_1(f, P_\varepsilon) &= 0, & M_2(f, P_\varepsilon) &= 1, \\ M_3(f, P_\varepsilon) &= 1, & M_4(f, P_\varepsilon) &= 2, & M_5(f, P_\varepsilon) &= 3, \end{aligned}$$

$$M_6(f, P_\varepsilon) = 3, \quad M_7(f, P_\varepsilon) = 3.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} s(f, P_\varepsilon) &= (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + 2(x_5 - x_4) + 2(x_6 - x_5) + 3(x_7 - x_6) \\ &= \left(2 - \frac{\varepsilon}{19} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + \left(2 + \frac{\varepsilon}{19} - \left(2 - \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + 2\left(3 - \frac{\varepsilon}{19} - \left(2 + \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) \\ &\quad + 2\left(3 + \frac{\varepsilon}{19} - \left(3 - \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + 3\left(4 - \left(3 + \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{2\varepsilon}{19} + \frac{2\varepsilon}{19} + 2 - \frac{4\varepsilon}{19} + \frac{4\varepsilon}{19} + 3 - \frac{3\varepsilon}{19} \\ &= 6 - \frac{3\varepsilon}{19} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S(f, P_\varepsilon) &= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + 2(x_4 - x_3) + 2(x_5 - x_4) + 3(x_6 - x_5) + 3(x_7 - x_6) \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{19} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + \left(2 - \frac{\varepsilon}{19} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + 2\left(2 + \frac{\varepsilon}{19} - \left(2 - \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) \\ &\quad + 2\left(3 - \frac{\varepsilon}{19} - \left(2 + \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + 3\left(3 + \frac{\varepsilon}{19} - \left(3 - \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) + 3\left(4 - \left(3 + \frac{\varepsilon}{19}\right)\right) \\ &= \frac{2\varepsilon}{19} + 1 - \frac{2\varepsilon}{19} + \frac{4\varepsilon}{19} + 2 - \frac{4\varepsilon}{19} + \frac{6\varepsilon}{19} + 3 - \frac{3\varepsilon}{19} \\ &= 6 + \frac{3\varepsilon}{19}. \end{aligned}$$

Ainsi on a

$$S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) = \frac{6\varepsilon}{19} < \varepsilon,$$

et ainsi la fonction f est intégrable. Montrons à présent que

$$\int_0^4 f(x)dx = 6.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note par P_n la partition de $[0, 4]$ définie par

$$P_n = \left\{0, 1 - \frac{1}{19n}, 1 + \frac{1}{19n}, 2 - \frac{1}{19n}, 2 + \frac{1}{19n}, 3 - \frac{1}{19n}, 3 + \frac{1}{19n}, 4\right\}.$$

Les calculs précédents montrent que $\inf \{s(f, P_n), n \geq 2\} = \inf \left\{6 - \frac{1}{19n}, n \geq 2\right\} = 6$ et $\sup \{S(f, P_n), n \geq 2\} = \sup \left\{6 + \frac{1}{19n}, n \geq 2\right\} = 6$. En utilisant que

$$\sup \{s(f, P_n), n \geq 2\} \leq \sup \{s(f, P), P \in \mathcal{P}_{0,4}\} = s(f) \leq S(f) = \inf \{S(f, P), P \in \mathcal{P}_{0,4}\} \leq \inf \{S(f, P_n), n \geq 2\},$$

et donc $s(f) = S(f) = 6$, i.e.

$$\int_0^4 f(x)dx = 6.$$



On note par \mathcal{P}_n la feuille de papier obtenue après n iterations et soit \mathcal{E}_n l'épaisseur, en millimètres, de \mathcal{P}_n . En particulier, on a $\mathcal{E}_0 = 1$. Puisque pour passer de \mathcal{P}_n à \mathcal{P}_{n+1} on plie la feuille en deux, on voit que $\mathcal{E}_{n+1} = 2\mathcal{E}_n$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{E}_n = 2^n \mathcal{E}_0 = 2^n .$$

Notons que 384400 kilomètres correspond à $384,4 \cdot 10^9$ millimètres. Ainsi, on a

$$\mathcal{E}_n > 384,4 \cdot 10^9 \Leftrightarrow 2^n := e^{n \ln(2)} > 384,4 \cdot 10^9 \Leftrightarrow n > \frac{\ln(384,4 \cdot 10^9)}{\ln(2)}$$

En utilisant une calculatrice, on voit que le plus petit n vérifiant la condition précédente est $n = 39$.

Ps : Si vous réussissez à plier une feuille 39 fois et que partez quelques jours sur la lune, n'hésitez pas à m'envoyer une carte postale. Safe trip !

