MAT 2525 - Correction du Devoir Maison 1

Exercice 1

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Par définition, on a

$$(\forall \mathrm{M} > 0)(\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}, n > \mathrm{N}), x_n > \mathrm{M}.$$

On a

$$\frac{x_n}{1+x_n} = \frac{x_n+1-1}{1+x_n} = \frac{x_n+1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x_n} = 1 - \frac{1}{1+x_n}.$$

Par définition, pour tout $\mathrm{M} > 0$, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $1 + x_n > x_n > \mathrm{M}$ et donc $0 < \frac{1}{1+x_n} < \frac{1}{x_n} < \frac{1}{\mathrm{M}}$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\mathrm{M} = \frac{1}{\varepsilon}$. Comme vu précédemment, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{1+x_n} < \frac{1}{\mathrm{M}} = \varepsilon$. En particulier, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+x_n} = 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

La réciproque n'est pas vraie. En effet, pour la suite $x_n = (-1)^n n, n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{1+x_n} = 1$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \neq +\infty$.

2. a.

- Si $\alpha = 0$, on a $x_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.
- Supposons $\alpha > 0$. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $n > \mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + 1$, on a

  $$0 < \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{\mathrm{N}^\alpha} < \varepsilon,$$

  et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.
- Pour finir, supposons $\alpha < 0$. Fixons $\mathrm{M} > 0$. Puisque $\alpha < 0$, on a $-\alpha > 0$. Notons $\mathrm{N} = \mathrm{E}(\mathrm{M}^{-\frac{1}{\alpha}}) + 1$ (remarquons que $\mathrm{M}^{-\frac{1}{\alpha}} > 0$). Alors pour tout $n > \mathrm{N}$, on a $n^{-\alpha} > \mathrm{N}^{-\alpha} > \mathrm{M}$, et donc pour tout $n > \mathrm{N}$, on a $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} > \mathrm{M}$. En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}.$$

On a

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{n} - \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{2\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+\sqrt{n}}}{2\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+\sqrt{n}}\right)} = \frac{1 - \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}{2\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $2\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) > 1$ et donc

$$0 < \left|\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1}{2\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} < \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{(\varepsilon+1)^2-1}\right)^2\right) + 1$. Pour tout $n > \mathrm{N}$, on a $0 < \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 < \varepsilon$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n^2 < n^2 + 1 < n^2 + 1 + 2n = (n+1)^2\,,$$

et donc $\sqrt{n^2} < \sqrt{n^2+1} < \sqrt{(n+1)^2}$, i.e. $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$. En multipliant l'inégalité par $\frac{1}{n}$, on a

$$1 < \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} < \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}\,.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on obtient donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et donc, d'après le Théorème du Sandwich, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = 1\,.$$

4. Prenons les suites $\{x_n^1\}_n\,, \{x_n^2\}_n\,, \{x_n^3\}_n\,, \{x_n^4\}_n$ et $\{x_n^5\}_n$ définies par

$$x_n^1 = 1\,, \quad x_n^2 = (-1)^n\,, \quad x_n^3 = \cos(n)\,, \quad x_n^4 = \sin(n)\,, \quad x_n^5 = e^{-n}\,.$$

Exercice 2

Comme vu en cours, on a, pour tout $y \in \mathbb{R}$, que $y - 1 < \mathrm{E}(y) \leq y < \mathrm{E}(y) + 1$. Fixons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$kx - 1 < \mathrm{E}(kx) \leq kx\,.$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(kx) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx\,.$$

et donc

$$\frac{1}{n^2}\left(x\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1\right) < x_n \leq x\sum_{k=1}^{n} k\,.$$

Comme vu dans le **DGD1**, on a $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et on obtient alors

$$\frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} < x_n \leq \frac{xn(n+1)}{2n^2}\,.$$

Puisque $\lim \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{xn(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{xn(n+1)}{2n^2} = \frac{x}{2}\,,$$

et donc, d'après le Théorème du Sandwich, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{x}{2}$.

Exercice 3

1.a. On utilise le Théorème 3 du cours. On note par P le polynôme caractéristique associé à la suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \frac{7}{2}\mathrm{X} - 2$. Le discriminant de P est $\Delta = \frac{49}{4} + 8 = \frac{81}{4} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$ et ainsi, les racines de P sont

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\frac{7}{2} + \frac{9}{2}}{2} = 4 .$$

Ainsi, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_n = a4^n + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

On cherche à présent les réels a et b. En utilisant que $x_0 = 1$ et $x_1 = 1$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b & = 1 \\ 4a - \frac{b}{2} & = 1 \end{cases}$$

En particulier, $a + b = 4a - \frac{b}{2}$, i.e. $3a = \frac{3b}{2}$ et donc $b = 2a$. En utilisant la première égalité du système, on a $1 = a + b = 3a$, et donc $a = \frac{1}{3}$. Ainsi, $b = \frac{2}{3}$ et donc

$$x_n = \frac{4^n}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

1.b. Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. De même, $\lim\limits_{n \to +\infty} 4^n = +\infty$ et donc

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty .$$

1.c. On voit facilement que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 4$.

2. Soit P le polynôme donné par $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} + \frac{1}{2})(\mathrm{X} - \frac{1908}{\pi^3})$. On a

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1908}{\pi^3}\right) - \frac{1908}{2\pi^3} .$$

On considère alors la suite récurrente linéaire d'ordre 2 donnée par

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1908}{\pi^3}\right)x_{n+1} + \frac{1908}{2\pi^3}x_n, \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

On a alors, d'après le Théorème 3 du cours, qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_n = a\left(\frac{1908}{\pi^3}\right)^n + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad (n \in \mathbb{N}) .$$

Puisque $\frac{1908}{\pi^3} > 1$ et $-1 < \frac{1}{2} < 0$, on obtient que

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1908}{\pi^3} .$$

Exercice 4

Tout d'abord, on voit que pour tout $n \geq 2$, on a $x_n = \sqrt{n + x_{n-1}}$.

1. On a $x_0 = 1$ et $x_1 = \sqrt{3}$, et donc $x_0 < x_1$. Supposons que $x_n \leq x_{n+1}$. On a

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2+x_{n+1}}}{\sqrt{n+1+x_n}},$$

et puisque $x_n \leq x_{n+1}$, on a $n+1+x_n \leq n+1+x_{n+1} < n+2+x_{n+1}$ et donc

$$\frac{n+2+x_{n+1}}{n+1+x_n} > 1, \qquad i.e. \qquad \sqrt{\frac{n+2+x_{n+1}}{n+1+x_n}} > 1.$$

En particulier, $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} > 1$, i.e. $x_{n+2} > x_{n+1}$, et donc la suite $\{x_n\}_n$ est croissante.
2. On voit facilement que $x_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En particulier, pour $n \geq 2$, on a $2 \leq n < n + x_{n-1}$ et donc $1 \leq \sqrt{n} \leq \sqrt{n + x_{n-1}} = x_n$ et donc $\sqrt{n} \leq x_n$. Montrons à présent par récurrence que $x_n < \sqrt{n}+1$. On a $u_1 = 1 < \sqrt{1} + 1 = 2$. Supposons que $x_n < \sqrt{n} + 1$. On a

$$x_{n+1}^2 = n+1+x_n < n+1+\sqrt{n}+1 < n+1+2\sqrt{n+1}+1 = (\sqrt{n+1}+1)^2$$

et puisque $1 < x_{n+1}$, on a $x_{n+1} < \sqrt{n+1} + 1$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n} \leq x_n < \sqrt{n} + 1.$$

3. En multipliant l'inégalité $\sqrt{n} \leq x_n < \sqrt{n} + 1$ par $\frac{1}{n+1}$, on obtient que

$$\frac{\sqrt{n}}{n+1} \leq \frac{x_n}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n+1} + \frac{1}{n+1}. \tag{1}$$

Puisque $n < n+1$, on a $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ et donc $0 < \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. D'après l'Exercice 1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et en appliquant le Théorème du Sandwich à l'Equation (1), on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n+1} = 0$.
4. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$x_n - \sqrt{n} = \sqrt{n + x_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} - 1\right).$$

5. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_{n-1}}{n} = 0$. En faisant un développement limité d'ordre 1 de la racine carrée, on obtient

$$\sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} = 1 + \frac{x_{n-1}}{2n} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et donc

$$x_n - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{x_{n-1}}{n}} - 1\right) = \frac{x_{n-1}}{2\sqrt{n}} + o(1).$$

En utilisant l''Equation (1), on obtient que

$$\frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} \leq \frac{x_{n-1}}{2\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 5

1. On commence par la suite $\{l_n\}_n$. Par hypothèse, on a $l_0 = 1$. Comment passe-t-on de $\mathscr{F}_0$ a $\mathscr{F}_1$? On divise chacun des côtés en trois parts égales et on construit nos nouveaux triangles. En particulier, on a $l_1 = \frac{1}{3}$. Ainsi, plus généralement, on a

$$l_{n+1} = \frac{l_n}{3}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

En particulier, $\{l_n\}_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1, et donc

$$l_n = \frac{1}{3^n}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A présent, regardons la suite $\{c_n\}_n$. Fixons n et prenons l'un des côtés de $\mathscr{F}_n$. Que devient ce côté à l'étape suivante, c.a.d. pour la figure $n+1$. On coupe le côté en trois parts égales, et on y ajoute un triangle. Ainsi, tout côté de $\mathscr{F}_n$ nous donne 4 côtés pour $\mathscr{F}_{n+1}$ et donc on voit facilement que

$$c_{n+1} = 4c_n, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

La suite $\{c_n\}_n$ est donc une suite géométrique de raison 4 et de premier terme 3, et donc

$$c_n = 3 \cdot 4^n, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

2. Le périmètre $\mathscr{P}_n$ de $\mathscr{F}_n$ est égal au nombre de côtés c_n de $\mathscr{F}_n$ multiplié par la longueur de ces côtés, i.e.

$$\mathscr{P}_n = c_n l_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Comme vu en cours, puisque $\frac{4}{3} > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^n}{3^n} = +\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathscr{P}_n = +\infty.$$

3. Commençons par une remarque. Pour simplifier, on notera par TE(R) un triangle équilatéral de côtés de longueur R. On a

$$\text{Aire TE(R)} = \frac{\sqrt{3}\mathrm{R}^2}{4}.$$

Quel est le lien entre $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{A}_{n+1}$. L'aire $\mathscr{A}_{n+1}$ de $\mathscr{F}_{n+1}$ est égale à l'aire de $\mathscr{A}_n$ de $\mathscr{F}_n$ + l'aire des triangles que l'on ajoute. Combien de triangles rajoute-t-on ? On ajoute un nouveau triangle sur chaque côté de $\mathscr{F}_n$. Comment y-a-t-il de cotes pour tout $\mathscr{F}_n$? Réponse : c_n. Quelle est la longueur du coté du nouveau triangle ajouté ? C'est la longueur d'un des côté de $\mathscr{F}_{n+1}$, i.e. l_{n+1}. Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{n+1} &= \mathscr{A}_n + c_n \,\text{Aire TE}(l_{n+1}) = \mathscr{A}_n + \frac{\sqrt{3}c_n l_{n+1}^2}{4} = \mathscr{A}_n + \frac{\sqrt{3}\cdot 3\cdot 4^n}{4\cdot 3^{2(n+1)}} \\ &= \mathscr{A}_n + \frac{\sqrt{3}\cdot 3\cdot 4^n}{4\cdot 3^2\cdot 9^n} = \mathscr{A}_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n.\end{aligned}$$

4. Comme vu précédemment, on a pour tout $n \geq 1$ que

$$\mathscr{A}_n = \mathscr{A}_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}, \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Ainsi on a, pour tout $n \geq 2$, que

$$\mathscr{A}_n = \mathscr{A}_{n-1} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} = \left(\mathscr{A}_{n-2} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$

et donc plus généralement, on obtient pour tout $n \geq 1$ que

$$\mathscr{A}_n = \mathscr{A}_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^i = \mathscr{A}_0 + \frac{\sqrt{3}}{12}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i .$$

En utilisant que

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_n &= \mathscr{A}_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8}{5} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n .\end{aligned}$$

Puisque $0 < \frac{4}{9} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 0$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\mathscr{A}_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{8}{5} = \frac{8}{5}\mathscr{A}_0 .$$

Exercice 6

Tout d'abord, puisque $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \leq \frac{1}{n^3}$ pour tout $n \geq 1$, on obtient d'après le Théorème de comparaison et le critère de Riemann que la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente.

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on notera par S_m les sommes partielles $S_m = \sum\limits_{n=1}^{m}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. On commence tout d'abord par décomposer la fraction $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ en éléments simples. Il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

En multipliant par n et en prenant $n = 0$, on obtient $a = \frac{1}{2}$. De la même manière, en multipliant $n+1$ et en prenant $n = -1$, on obtient $b = -1$ et en multipliant par $n+2$ et en prenant $n = -2$, on a $c = \frac{1}{2}$, i.e.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}S_m &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n+2}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \sum_{u=2}^{m+1}\frac{1}{u} + \frac{1}{2}\sum_{u=3}^{m+2}\frac{1}{u}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n} - \left(\sum_{u=1}^{m}\frac{1}{u} + \frac{1}{m+1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{u=1}^{m}\frac{1}{u} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} - 1 - \frac{1}{2}\right)\\ &= -\left(\frac{1}{m+1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} - 1 - \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+2)}\end{aligned}$$

En utilisant que $\lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{2(m+1)} = \lim\limits_{m\to+\infty} \frac{1}{2(m+2)} = 0$, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{m\to+\infty} \mathrm{S}_m = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{4} - \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+2)} = \frac{1}{4},$$

et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.